نظرية الماكينات

أنواع وطرق تحليل الآليات الميكانيكية

تأليف

د. محمد عبد المنعم محمد محمود

قسم القوى الميكانيكية

كلية الدراسات التكنولوجية

الهيئة العامة للتعليم التطبيقي والتدريب

دولة الكويت

بطاقة فهرسة
فهرسة أثناء النشر إعداد الهيئة العامة لدار الكتب والوثائق القومية
إدارة الشئون الفنية

محمود، محمد عبد المنعم محمد.
نظرية الماكينات: أنواع وطرق تحليل الآليات الميكانيكية/ تأليف محمد عبد المنعم محمد محمود. — ط١. — القاهرة: دار النشر للجامعات، ٢٠٠٦.
٤١٢ ص ، ٢٤ سم.
تدمك ٧ ١٧٥ ٣١٦ ٩٧٧
١- الآلات — نظريات ٢- الهندسة الميكانيكية — نظريات.
٣- نظرية الآلات أ- العنوان
٦٢١,٨٠١

الناشر: دار النشر للجامعات
رقم الإيداع: ٢٠٠٦/٥٧٤٣
الترقيم الدولي: I.S.B.N: 977 – 316 – 175 - 7
الكود: ٢/١٨٤

دار النشر للجامعات - مصر
ص.ب (١٣٠ محمد فريد) القاهرة ١١٥١٨
تليفون: ٤٥٠٢٨١٣ - تليفاكس: ٤٥٠٢٨١٢
E-mail: Darannshr@Link.net

نظرية الماكينات

أنواع وطرق تحليل الآليات الميكانيكية

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

يقال إن الحضارة الإنسانية قد بدأت باختراع العجلة — وهي في جوهرها آلة وإن تكن أبسط آلية ممكنة ، وتَبِعَ هذا الاختراع تقدم مطرد في مجال التكنولوجيا يعتمد إلى حد كبير على استعمال الآليات الميكانيكية (والتي تستمد الطاقة اللازمة لتشغيلها من الكهرباء أو البخار أو الوقود السائل أو حتى الطاقة الشمسية). ولهذا يصادف الإنسان المعاصر العشرات — إن لم يكن المئات — من الآليات في حياته اليومية في المنـــزل وفي الشارع وفي مكان العمل. وحتى ربات البيوت يتعاملن مع العشرات من الآليات في المنـــزل كأدوات المطبخ والغسالات وأدوات التنظيف ، وكذلك الأطفال الذين تتركب معظم ألعابهم من آليات ميكانيكية. ويمكن لزائر المدينة الترفيهية أن يرى عشرات الألعاب التي تتجلى فيها عبقرية المصمم في استخدام آليات مركبة تقوم بحركات تبعث البهجة والسرور في نفوس راكبيها ومشاهديهم على السواء. ولاشك أن العاملين في مجال الهندسة والتكنولوجيا وكذلك العاملين في المصانع وفي مجال صيانة وإصلاح المركبات والسفن وغيرها أكثر تعاملا مع الآليات من غيرهم.

وإنه ليسرني أن أضع هذا الكتاب بين يدي القارئ العربي وفيه يجد أمثلة عديدة لآليات مألوفة له مع وصف لتركيبها وطريقة حركتها مصحوبا بالعديد من الصور والرسومات التوضيحية ، وحتى القارئ غير المتخصص في الهندسة والتكنولوجيا فسيجد مادة علمية سهلة ، خاصة في **الفصل الثاني**. أما القارئ المتخصص فسيجد عرضا للطرق الشائعة لتحليل حركة الآليات في باقي الكتاب مع عدد كبير من الأمثلة المحلولة بالتفصيل لتوضيح المفاهيم والطرق المطروحة.

وتسهيلا على القارئ فإن **الفصل الأول** يعرض بعض الأساسيات اللازمة لمتابعة واستيعاب المادة العلمية المطروحة.

وقد اسْـتُخْدِمَت لغةٌ عربيةٌ مبسطةٌ لشرح المفاهيم والمعلومات العلمية مع الحرص على وجود ترجمة باللغة الإنجليزية لكل مصطلح علمي عند وروده للمرة الأولى في الكتاب مع عرض قائمة بهذه المصطلحات وترجمتها في نهاية الكتاب.

ولاشك أن هذا سيسهل على القارئ الذي يرغب في الدراسة المفصلة لأي معلومة وردت في الكتاب أن يطلع على المراجع الأجنبية التي تغطي الموضوع.

ويعطي هذا الكتاب عناية خاصة لاستعمال الكمبيوتر لدراسة وتحليل حركة الآليات مع اشتماله على البرامج التي يمكن للقارئ استخدامها لهذا الغرض.

وقد استحدثـــتُ طريقةً لتحليل حركة الآليات باستعمال التفاضل العددي وبينتُ فائدتها بالعديد من الأمثلة المحلولة كما هو وارد في **الفصل الخامس** ، وهذه الطريقة - بقدر علمي - لم تتداول من قبل في المراجع الأخرى.

ولظني أن هذا الكتاب هو من أوائل الكتب العربية التي تتعرض لتحليل حركة الآليات بمثل هذا العمق والتفصيل فإنني أرجو أن يجد فيه الزملاء العاملون والباحثون في مجال الهندسة والتكنولوجيا ما يساعدهم في إنجاز إسهامات أكبر في إغناء المكتبة العربية.

وإنني أتوجه بجزيل الشكر للزميل الدكتور سيد شحاتة كرار على مراجعة المادة العلمية واقتراحاته القيمة في طريقة إخراج هذا الكتاب.

المحتويات

الفصل الأول
مفاهيم أساسية

العلم الذي يختص بدراسة حركة أجزاء الآلات الميكانيكية في أثناء التشغيل هو علم نظرية الماكينات. ودراسة حركة الأجزاء هي عادة أول ما يهتم به المهندس والفني عند تصميم وتشغيل الآلات وذلك لضمان أداء الآلة للحركة المطلوبة ، ومن جهة أخرى لضمان اتزان الآلة تحت تأثير الأحمال الواقعة عليها أثناء التشغيل. وينقسم هذا العلم إلى جزأين: الجزء الأول هو كينماتيكا الآلات والجزء الثاني يغطى ديناميكا الآلات. وهذا الكتاب يغطي الجزء الأول.

1.1 تعريفات

الكينماتيكا (علم الحركة) kinematics

هو علم دراسة حركة أجزاء الآلة بالنسبة لمرجع ثابت (عادة يكون القاعدة الثابتة أو الأرض) وهو يشمل دراسة الإزاحة والسرعة والعجلة. ودراسة الإزاحة تركز على كيفية انتقال أجزاء الآلة والمسافات التي تتحركها هذه الأجزاء أثناء التشغيل ، ودراسة السرعة تركز على تعيين السرعة الخطية والسرعة الزاوية لأجزاء الآلة أثناء دورة من دورات التشغيل وهذا يحدد الزمن المطلوب لإكمال الدورة وكذلك القدرة اللازمة لذلك ، أما دراسة العجلة فتركز على تعيين العجلة الخطية والعجلة الزاوية لأجزاء الآلة وبذلك يمكن تقدير القوى الناتجة عن حركة أجزاء الآلة نفسها.

الديناميكا dynamics

هو علم دراسة القوي المؤثرة على أجزاء الآلة بسبب التحميل الخارجي وكذلك بسبب حركة أجزاء الآلة نفسها، وما ينتج عن ذلك من ردود فعل عند الوصلات وعند الدعامات bearings وكذلك ما ينتج عن هذه القوى من إجهادات في أجزاء الآلية.

الآلة machine

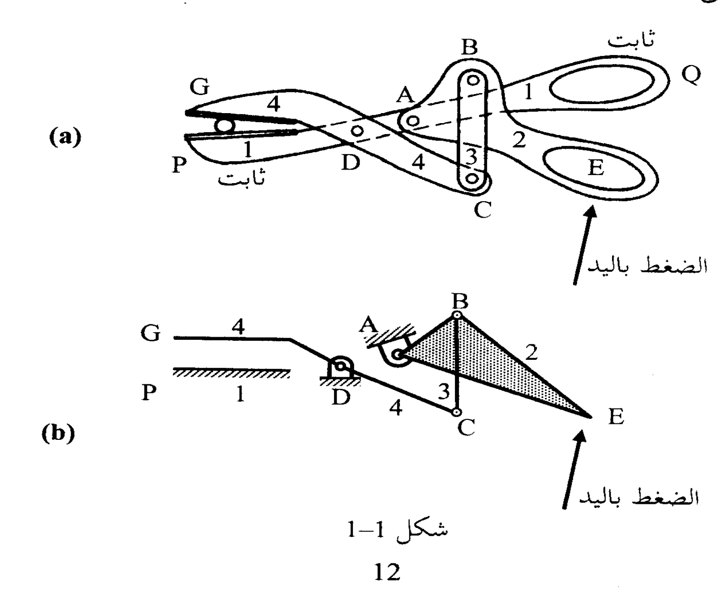
هي أداة تستعمل لنقل الطاقة أو تغيير شكلها ، فمثلا المحرك الكهربي يحول الطاقة

الكهربائية إلى طاقة ميكانيكية. وتتكون الآلة من أجزاء أحدها على الأقل ثابت والباقي يتحرك بالنسبة لهذا الجزء الثابت.

الآلية mechanism

هي أداة تستعمل في نقل الحركة ، وقد تنقل الطاقة أيضا ، وتتكون من أجزاء جامدة (ثابتة الأبعاد) تتحرك بالنسبة لبعضها حركة محددة يمكن التنبؤ بها وحسابها. وبعض المراجع تعرف الفارق بين الآلة والآلية في أن الآلة تستعمل أساسا لنقل الطاقة أو تحويلها وتكون الأحمال فيها عالية أما الآلية فهي أحيانا تختص بالحركة فقط ومثال ذلك الساعة التي لا تقوم بأداء أي شغل إلا بما يكفى للتغلب على الاحتكاك الداخلي بين أجزائها. والتفرقة بين الآلة والآلية لا ينبني عليه أي عمل ولذلك فإننا هنا سنستعمل اللفظين كمترادفين. وتجدر الإشارة إلى أن بعض المراجع تستخدم أيضا المصطلح kinematic chain (ويعني لفظيا "السلسلة الحركية") للإشارة إلى الآلية.

ويوضح شكل 1-1(a) مثالا لإحدى الآليات وهي قصافة snip حيث يؤدي الضغط على النقطة E إلى إطباق الفك G على الفك P بقوة كبيرة .



شكل 1-1

مخطط تحليل الحركة للآلية Kinematic Diagram

هو رسم للآلة بمقياس رسم مناسب ، يظهر الأجزاء الأساسية التي تؤثر في الحركة ويوضح الوصلات بينها ويشمل الأبعاد الأساسية للآلة. ومثال ذلك آلية القصافة المبينة في شكل 1-1(a) فإن مخطط تحليل الحركة لها Kinematic diagram المبين في شكل 1-1(b) يظهر أن هذه الآلية تتكون أساسا من أربعة أضلاع (الضلع 1 مثبت وتنسب إليه حركة باقي الأضلاع) ويمكن حساب حركة كل جزء فيها نتيجة دوران الضلع 2 (لاحظ أن CDG هو ضلع واحد متماسك).

الضلع الجامد rigid link

هو ضلع أو جزء من أجزاء الآلة لا تتغير أبعاده أثناء الحركة (إلا تغييرات طفيفة نتيجة التمدد الحراري أو نتيجة للتحميل) ومثال ذلك الأضلاع 2,3,4 في شكل 1-1. أما الحبال والسلاسل والكابلات فتعتبر أضلاع جامدة إذا كانت تحت تأثير قوة شد أما إذا زالت قوة الشد فهي ليست أضلاعا جامدة. ولا يعتبر الزنبرك spring ضلعا جامدا. وقد أُطلق على الضلع لفظ link ومعناها اللغوي "الرابط" على اعتبار أن وظيفته في الحركة هي أساسا ربط الوصلات أي حفظ المسافة بين الوصلات ثابتة ، وعلى ذلك فإن شكل الضلع الجامد لا يؤثر في حركة الآلية طالما أنه يحفظ المسافة بين الوصلات ثابتة.

الآلية Linkage

على أساس التعريف السابق لكل ضلع على أن وظيفته في الحركة هي أساسا ربط الوصلات ، لذلك أحيانا يطلق على الآلية لفظ linkage ونحن سنستعمل هذا اللفظ كمترادف للفظ mechanism .

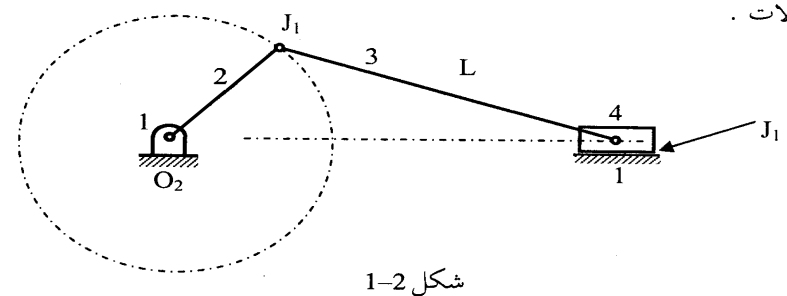
الوصلات joints

هي مواضع اتصال (أو تلامس) الأضلاع مع بعضها البعض. ومن أمثلة ذلك الوصلة J_1 بين الأضلاع 2,3 في شكل 1-2 وكذلك الوصلة J_1 بين المكبس وجدار الأسطوانة أو بين المنـــزلق والسطح الملامس له.

1.2 أنواع الوصلات

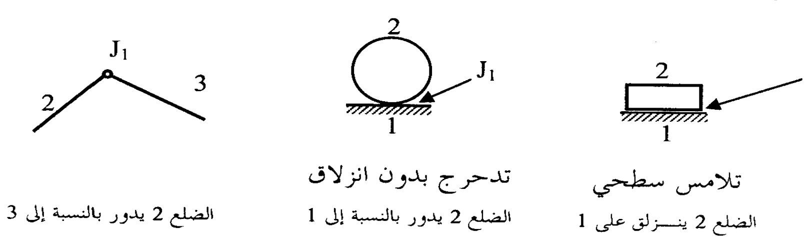
يمكن تقسيم الوصلات حسب نوع الحركة التي تسمح بها إلى :

أولا: وصلات الحركة المستوية: وهي الحركة التي تتم بحيث تنتقل الأضلاع جميعا في مستوى واحد أو مستويات متوازية ، وهذا النوع من الحركة يشمل معظم الآلات .



شكل 2–1

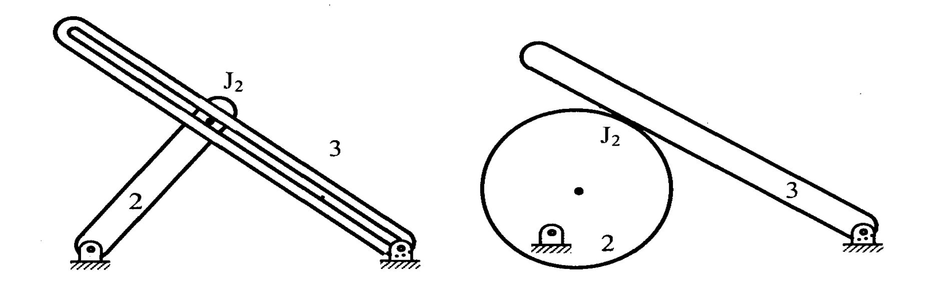
ويوضح شكل 3–1 أمثلة لهذه الوصلات وهي تسمح بحركة نسبية واحدة فقط بين الضلعين. وتُعطى هذه الوصلات الرمز J_1 لأن لها درجة حرية واحدة single degree of freedom أي أنها تسمح إما بدوران أو بانزلاق الضلعين بالنسبة إلى بعضهما.



شكل 3–1

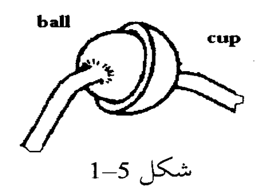
أما شكل 4–1 فيوضح أنواع الوصلات التي تسمح بدرجتين من الحركة بين الضلعين وتعطي رمز J_2. ففي شكل 4–1 تسمح الوصلة J_2 بحركة انزلاق (انتقال) translation بين الضلعين 2,3 بالإضافة إلى حركة دوران rotation بين نفس

الضلعين ولذلك فهذه الوصلات يقال إن لها درجتي حرية .



شكل 4–1

ثانيا: وصلات الحركة الفراغية: وهي تسمح بحركة عامة بين الضلعين وأحد أنواع هذه الوصلات موضح في شكل 5–1 وهو الوصلة الكروية.



شكل 5–1

1.3 درجات الحرية للآلية Degrees of freedom for Mechanisms

في الحركة المستوية يكون لكل ضلع منفصل ثلاث درجات حرية ، أي يمكنه الانتقال أفقيا ورأسيا كما يمكنه الدوران . ولكن ارتباط الأضلاع مع بعضها البعض عن طريق الوصلات يحد من هذه الحرية. والمعادلة العامة لحساب درجة حرية الآلية (m) هي:

$$m = 3(n-1) - 2J_1 - J_2 \qquad (1-1)$$

حيث n هو عدد الأضلاع ، J_1 هو عدد الوصلات ذات درجة حرية واحدة ، J_2 هو عدد الوصلات ذات درجتي حرية .

ويقصد بدرجة حرية الآلية (m) عدد المتغيرات المستقلة اللازمة لوصف حركة جميع الأضلاع وصفا محددا بالنسبة لضلع واحد منها يعتبر ثابتا ، فإذا كانت قيمة m المحسوبة من المعادلة صفرا أو سالبة فإن الأضلاع لا يمكن أن تتحرك بالنسبة لبعضها البعض وتكون هذه هي حالة المنشأ structure. أما إذا كانت m موجبة فإن هذه تكون حالة آلية ذات درجة حرية مساوية لقيمة m. وفي مراجع كثيرة يطلق على m لفظ mobility أي القدرة على الحركة.

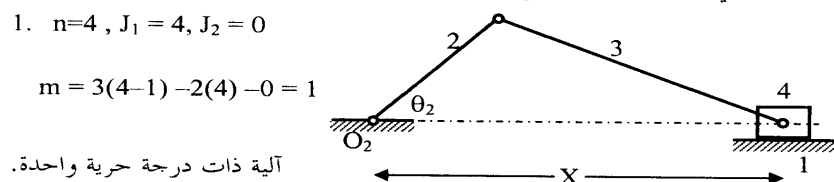
ويراعى عند ترقيم الأضلاع لحساب عددها البدء برقم 2 باستمرار لأن هناك دائما ضلعا ثابتا تنسب إليه الحركة ولذلك من الأفضل أن يعطى له رقم 1 حتى لا يحدث خطأ في عملية عد الأضلاع.

أمثلة: في الأمثلة التالية مطلوب حساب قيمة درجة الحرية لكل حالة :

1. $n=4$, $J_1 = 4$, $J_2 = 0$

$m = 3(4-1) - 2(4) - 0 = 1$

آلية ذات درجة حرية واحدة.

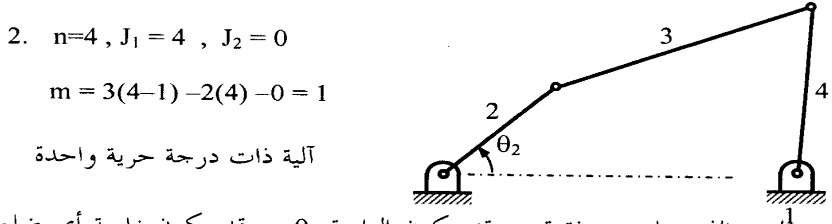


معنى ذلك أنه يلزم معرفة قيمة متغير واحد حتى يتسنى تحليل إزاحة الآلية ، وهذا المتغير قد يكون الزاوية θ_2 وقد يكون المسافة X.

2. $n=4$, $J_1 = 4$, $J_2 = 0$

$m = 3(4-1) - 2(4) - 0 = 1$

آلية ذات درجة حرية واحدة



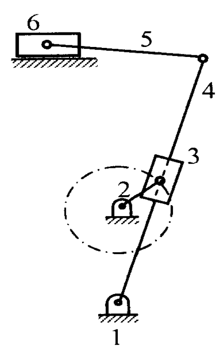
المتغير الذي يلزم معرفة قيمته قد يكون الزاوية θ_2 ، وقد يكون زاوية أي ضلع آخر مع الأفقي.

3. $n=6$, $J_1 = 7$, $J_2 = 0$

$m = 3(6-1) - 2(7) - 0 = 1$

آلية ذات درجة حرية واحدة

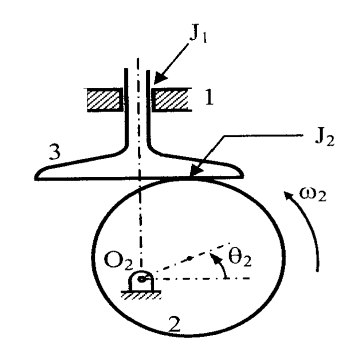
المتغير الذي يلزم معرفة قيمته حتى يمكن تحليل الآلية قد يكون زاوية الضلع 2 مع الأفقي.



4. $n=3$, $J_1 = 2$, $J_2 = 1$

$m = 3(3-1) - 2(2) - 1 = 1$

آلية ذات درجة حرية واحدة

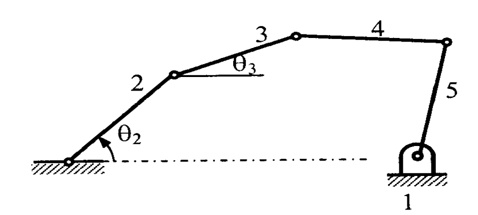


المتغير الذي يلزم معرفة قيمته حتى يمكن تحليل الآلية قد يكون الزاوية θ_2 ، وقد يكون المسافة من التابع 3 إلى محور الدوران O_2.

5. $n=5$, $J_1 = 5$, $J_2 = 0$

$m=3(5-1) - 2(5) = 2$

آلية ذات درجتي حرية

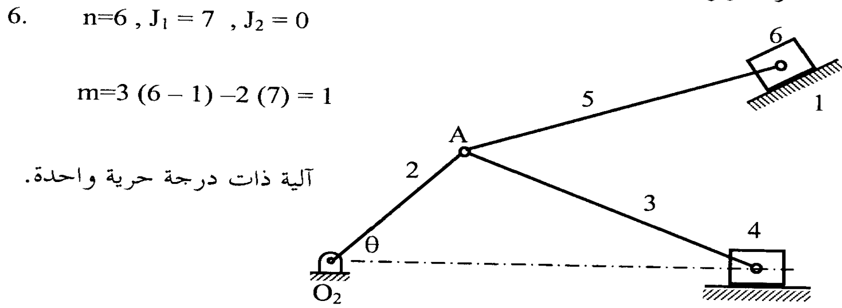


معنى ذلك أنه يلزم معرفة قيمة متغيرين حتى يتسنى تحليل الآلية ، وهذان المتغيران قد يكونا الزاوية θ_2 والزاوية θ_3 ، أو أي زاويتين أخرتين.

6. $n=6 , J_1 = 7 , J_2 = 0$

$m=3 (6-1) -2 (7) = 1$

آلية ذات درجة حرية واحدة.



ويلاحظ أن الوصلة A تحسب مرتين لأنها ملتقى ثلاثة أضلاع أي أن هناك وصلة بين الضلعين 5 , 3 ووصلة أخرى منطبقة على الأولى بين الضلعين 5 , 3 . والمتغير الذي يلزم معرفة قيمته قد يكون الزاوية θ أو المسافة بين O_2 وأحد المنـــزلقات.

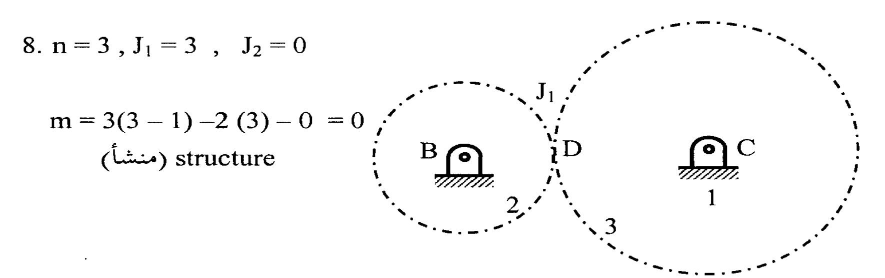
7. $n=6 , J_1 = 8 , J_2 = 0$

$m = 3(6-1) -2 (8) - 0 = -1$

structure (منشأ)

لاحظ وجود وصلتين J_1 منطبقتين عند A و B و C و D . وبصفة عامة إذا تقابل عدد L من الأضلاع عند وصلة دورانية فإن عدد وصلات J_1 يكون مساويا $(L-1)$.

يبين الشكل ترسين متداخلة أسنانهما بحيث يدير أحدهما الآخر.



وهذه النتيجة خاطئة لأن دوران الترس 2 يؤدي إلى دوران الترس 3 أي أن الآلية لها درجة حـــرية واحدة. والسبب في النتيجة الخـــاطئة للمعـــادلة يرجع إلى وجود ما يسمى مانـــع زائـــد (redundant constraint) عند النقطة D . ولتوضيح ذلك نعود إلى تعريف الوصلة J_1 عند النقطة B ، فهذه الوصلة تمنع الترس 2 من الحركة أفقيا ورأسيا وتسمح له فقط بالدوران ، وكذلك الوصلة J_1 عند النقطة C ، فهذه الوصلة تمنع الترس 3 من الحركة أفقيا ورأسيا ، وهذا معناه أن المسافة BC تظل ثابتة أثناء دوران الترسين ، أما الوصلة J_1 عند النقطة D فتمنع الترس 3 من الحركة أفقيا ورأسيا بالنسبة للترس 2 وتسمح له بالدوران بدون انزلاق عليه ، أي أن هذه الوصلة تحافظ على المسافة BC ثابتة أثناء دوران الترسين وهو ما تحققه فعلا الوصلتان الأخرتان عند B و C ، ولذلك تكون الوصلة J_1 عند النقطة D قد أضافت مانعا مكررا هو عدم جواز تحرك الترسين أفقيا بعيدا عن بعضهما. ولذلك يجب تعديل المعادلة العامة لحساب درجة حرية الآلية (m) إلى الصورة:

$$m \geq 3(n-1) - 2J_1 - J_2 \qquad (1-1)'$$

أو الصورة:

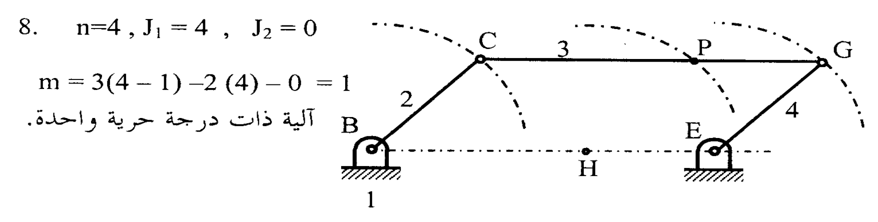
$$m = 3(n-1) - 2J_1 - J_2 + D \qquad (1-1)''$$

حيث D هو عدد الموانع الزائدة. والمثالان التاليان يوضحان هذا المفهوم بصورة أوضح.

8. $n=4 , J_1 = 4 , J_2 = 0$

$m = 3(4 - 1) - 2(4) - 0 = 1$

آلية ذات درجة حرية واحدة.



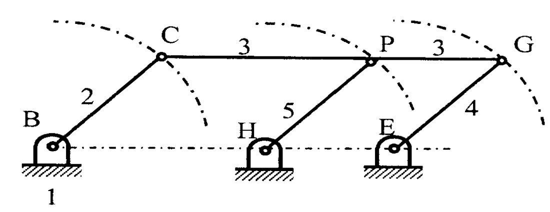
وهي آلية الأضلاع الأربعة المعروفة ولكن في الحالة الخاصة التي فيها BE = CG وكذلك BC = EG ولذلك فإن أي نقطة على الضلع CG مثل النقطة P تدور على قوس دائري نصف قطره يساوي BC ومركزه النقطة H.

فإذا أضيف إلى الآلية ضلع خامس (HP) بحيث يكون طوله يساوي BC ومركز دورانه H هو نفسه مركز القوس الدائري الذي تتحرك عليه النقطة P فإن هذا الضلع الجديد المبين في المثال التالي يقيد حركة النقطة P . بحيث تتحرك على قوس دائري نصف قطره يساوي HP ومركزه النقطة H وهذا يعتبر قيدا مكررا لأن النقطة P تتحرك على القوس الدائري سواء أضيف الضلع HP أو لم يضف. أي أن D = 1 في المثال التالي.

9. $n=5 , J_1 = 6 , J_2 = 0 , D = 1$

$m = 3(5 - 1) - 2(6) - 0 + 1 = 1$

آلية ذات درجة حرية واحدة.

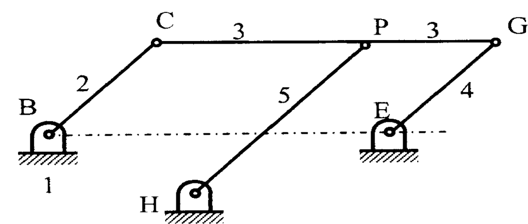


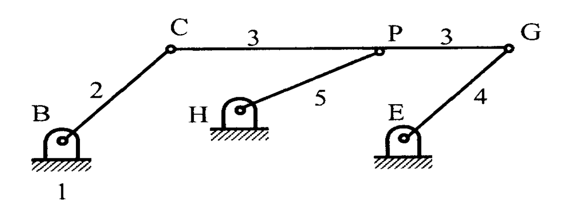
وللتأكيد فإن m = 1 فقط إذا كان HP = EG وكذلك PG = HE (مع ملاحظة أن CPG هو ضلع واحد متماسك). أما إذا انتفى أي من هذين الشرطين فإن m = 0 ولا يمكن للأضلاع أن تتحرك كما يبين ذلك المثال التالي وفيه آليتان ليس فيهما موانع زائدة.

10. $n = 5$, $J_1 = 6$, $J_2 = 0$, $D = 0$

$$m = 3(5-1) - 2(6) - 0 + 0 = 0$$

(منشأ) structure

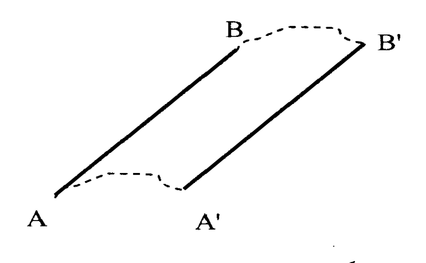




1.4 تصنيف الحركة

أولا- الحركة الانتقالية pure translation :

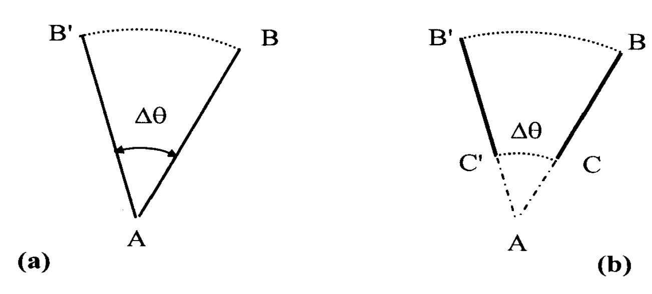
هي انتقال الضلع (مثلا AB) إلى موضع جديد (مثلا A'B' في شكل 6-1) على أي مسار بحيث يكون الضلع في خلال الحركة موازيا لنفسه في بدايتها .



شكل 6-1

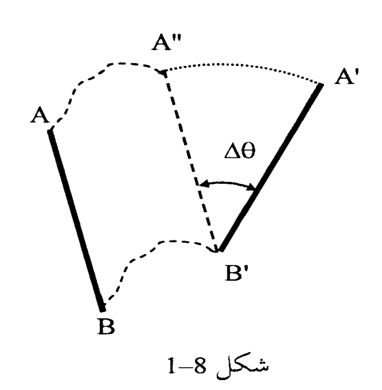
ثانيا- الحركة الدورانية البحتة pure rotation :

هي انتقال الضلع (مثلا AB في شكل (a)7-1) إلى موضع جديد (مثل 'AB) بحيث تنتقل كل نقطة من الضلع على مسار دائري مركزه A. وشكل (b)7-1 يبين دوران الضلع BC إلى 'B'C على مسار دائري مركزه A يقع على امتداد الضلعBC .



شكل 7-1

والحركة المستوية عموما يمكن اعتبارها كمجموع حركتين: حركة انتقالية وحركة دورانية. ففي شكل 8-1 حركة الضلع AB إلى 'A'B يمكن اعتبارها انتقالا من AB إلى 'A"B ثم دورانا حول 'B إلى الوضع النهائي 'A'B .



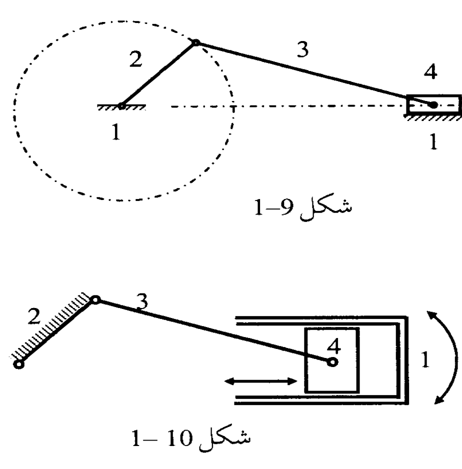
شكل 8-1

ثالثا- الحركة الحلزونية helical motion وهي حركة كل نقطة من الجسم على مسار حلزوني ومثال ذلك حركة الصامولة على العمود المسنن .

رابعا- الحركة الكروية spherical motion وفيها تتحرك كل نقطة من الضلع على مسار كروي ومثال ذلك حركة الضلع 2 بالنسبة للكأس المثبتة (1) كما في شكل 1-5 .

1.5 الآليات المنعكسة kinematic inversion .

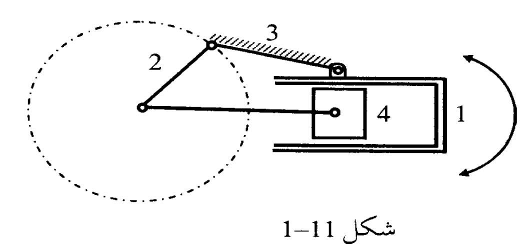
يمكن الحصول من آلية معينة على آليات مختلفة تماما في الحركة عن بعضها البعض وذلك عن طريق تغيير الضلع الذي يتم تثبيته. وأمثلة ذلك آلية عمود الإدارة والمكبس الموضحة في شكل 9-1 وهي الآلية المستعملة في آلات الديزل والبنـــزين وهذه الآلية فيها أربعة أضلاع ولذلك يمكن الحصول منها على أربع آليات بديلة أولها الموضحة في شكل 9-1. وفي حالة ترك الضلع 1 حرا في الحركة وتثبيت الضلع 2 بدلا منه ، تنتج الآلية الموضحة في شكل 10-1. وفي هذه الحالة فإن الأسطوانة 1 تدور عندما يتحرك المكبس 4 داخلها بينما يظل الضلع 2 ثابتا. وقد استعملت هذه الآلية في محركات الطائرات في بداية القرن العشرين حيث كانت المراوح تثبت في الأسطوانات الدوارة.



شكل 9-1

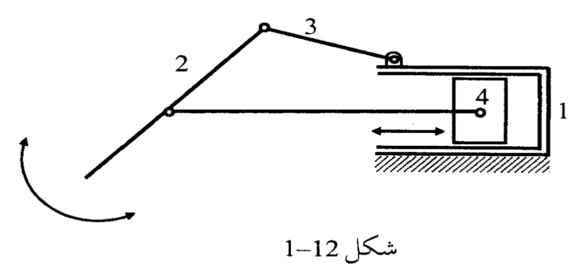
شكل 10-1

ويوضح شكل 11–1 آلية ثالثة مشتقة من الأولى وهي تنتج من تثبت الضلع 3 بينما يدور ذراع الدوران 2 دورات كاملة وتتذبذب الأسطوانة 4 نتيجة دخول وخروج المكبس فيها. وتستعمل هذه الآلية في بعض آلات البخارية المتذبذبة وخاصة في لعب الأطفال ونماذج الآلات البخارية. أما الآلية الرابعة والموضحة في شكل 12–1 فيمكن الحصول عليها بتثبيت الأسطوانة 1 بينما يتذبذب ذراع الإدارة 2 . وهذه الآلية شائعة في المضخات.



شكل 11–1

ويلاحظ في جميع الآليات الأربعة السابقة أن الحركة النسبية بين الأضلاع وبعضها لا تتغير بتاتا بسبب تغيير الضلع الثابت من آلية لأخرى طالما أن أطوال الأضلاع ونوع الوصلات بينها لا تتغير.



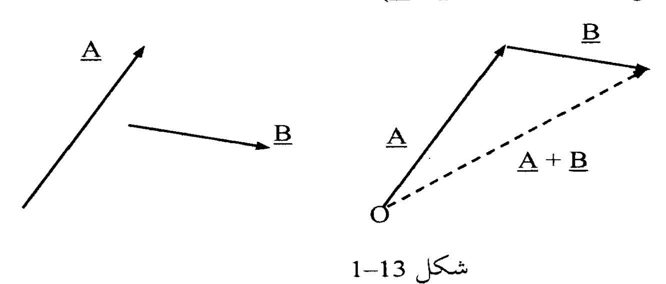
شكل 12–1

1.6 المتجهات vectors

يوجد نوعان من الكميات : الكمية القياسية scalar quantity والكمية المتجهة vector quantity. ومن أمثلة الكميات القياسية الكتلة ودرجة الحرارة والزمن والشغل المبذول. أما الكميات المتجهة فلها مقدار magnitude واتجاه direction ومن أمثلتها

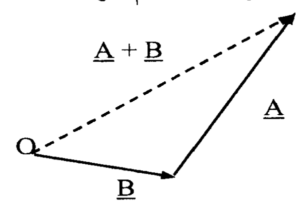
الإزاحة والسرعة والعجلة والقوة.

ويتم تمثيل الكمية المتجهة بسهم يمثل طوله المقدار ويمثل اتجاهه اتجاه الكمية المتجهة. ويتم جمع المتجهات إما بالحساب أو بالرسم ويوضح شكل 13-1 طريقة جمع متجه A مع متجه B عن طريق رسم المتجه A بسهم بدءاً من نقطة O (البؤرة) وهي نقطة اختيارية ، ثم رسم المتجه B كسهم يبدأ من حيث انتهى سهم A. وتكون المحصلة resultant وهي الكمية (A+B) هو السهم المنقط والذي يبدأ من البؤرة إلى نهاية السهم B (مع ملاحظة أن متجه المحصلة يغلق المثلث في اتجاه دوري معاكس لاتجاه المتجهين A , B).



شكل 13-1

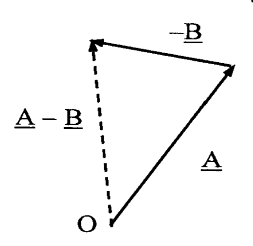
ويبين شكل 14-1 أن ترتيب رسم المتجهات لا يؤثر على المحصلة النهائية طالما أن كل سهم طوله يمثل مقدار المتجه واتجاه السهم هو الاتجاه الصحيح للمتجه.



شكل 14-1

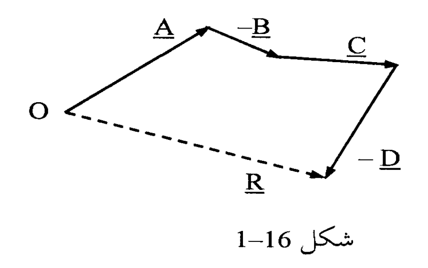
ويتم طرح المتجهات عن طريق عكس اتجاه السهم الذي يمثل المتجه ذو الإشارة السالبة فشكل 15-1 يوضح إيجاد المحصلة R في المعادلة R = A – B حيث تم عكس

اتجاه المتجه $\underline{B}$ وجمع السهم المعكوس كالمعتاد على السهم $\underline{A}$.



شكل 15–1

مثال 1–1: $\underline{R}$ هي محصلة المتجهات الأربعة الموضحة في الشكل 16–1 ، اكتب المعادلة الاتجاهية التي تحقق الرسم.



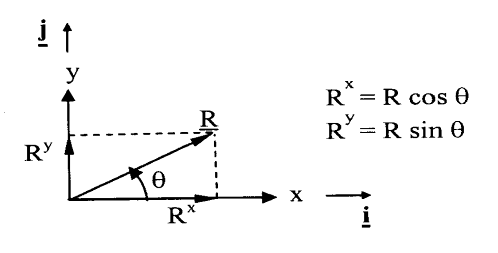
شكل 16–1

الحل:

$\underline{R} = \underline{A} - \underline{B} + \underline{C} - \underline{D}$

وبالإضافة إلى الرسم يمكن جمع أو طرح المتجهات بالحساب. وشكل 17–1 يوضح المتجه $\underline{R}$ ومركباته R^y , R^x في اتجاه المحورين المتعامدين x و y . ويجب تذكر أن اتجاه المتجه يعرف بمقدار الزاوية θ بين السهم الذي يمثل المتجه وبين الاتجاه الموجب لمحور x (المتجه ناحية اليمين) كما هو موضح في شكل 18–1 . ويلاحظ من الشكل أن قيمة θ تتراوح بين صفر و 360^o درجة وأنها تقاس عند قاعدة السهم

(أي ذيل السهم) عكس عقرب الساعة.

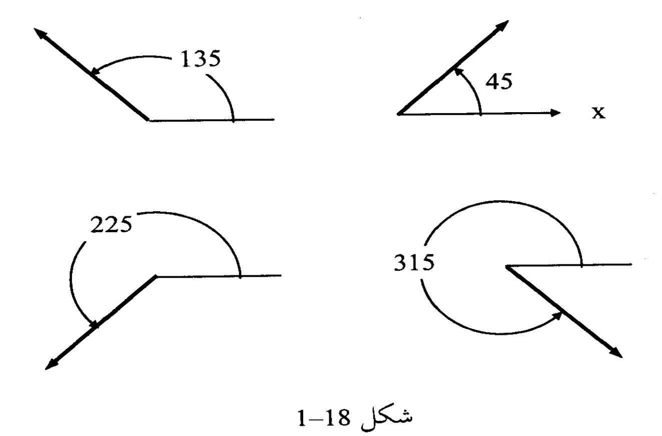


شكل 17–1

ويمكن تحليل المتجه إلى المركبتين R^x و R^y باستخدام المعادلتين المبينتين في شكل 17–1 ثم كتابة المتجه في الصورة

$$\underline{R} = R^x \, \underline{i} + R^y \, \underline{j} = R \cos \theta \, \underline{i} + R \sin \theta \, \underline{j} \qquad (1\text{–}2)$$

حيث $\underline{i}$, $\underline{j}$ هما وحدتي المتجهات في الاتجاهين x , y على الترتيب.



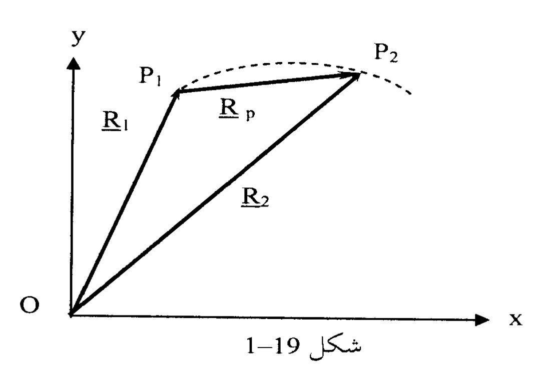
شكل 18–1

1.7 متجه الموضع – إزاحة النقطة

Position Vector and Displacement

يوضح شكل 19–1 أن موضع النقطة P يتحدد بالنسبة للمحورين الثابتين x و y عن طريق المتجه $\underline{R}_1$ الذي يتجه من نقطة O إلى النقطة P_1. فإذا انتقلت النقطة إلى الموضع الجديد P_2 فإن موضعها يتحدد بالمتجه $\underline{R}_2$ وتكون الإزاحة $\underline{R}_p$ هي:

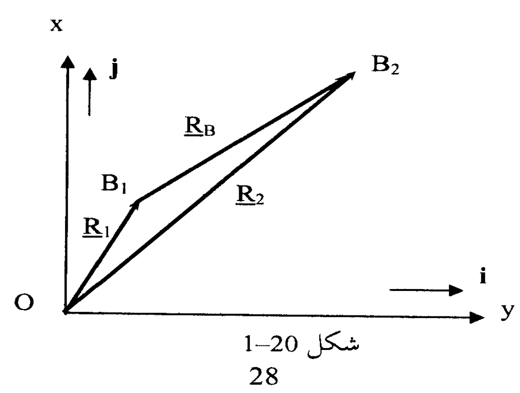
$$\underline{R}_p = \underline{R}_2 - \underline{R}_1 \qquad (1\text{–}3)$$



شكل 19–1

مثال 2–1

أوجد إزاحة النقطة B (مقدارا واتجاها) التي تحركت من الموضع B_1 الذي إحداثياته الأفقية والرأسية هما ($y = 3$,$x = 2$) إلى الموضع B_2 الذي إحداثياته هي ($y = 5$,$x = 6$).



شكل 20–1

الحل:

متجه الإزاحة $\underline{R}B$ له مركبتان: المركبة الأفقية وقيمتها تساوي فرق الإحداثيات الأفقية والمركبة الرأسية وقيمتها تساوي فرق الإحداثيات الرأسية

المركبة الأفقية لمتجه الإزاحة R_{Bx} $\underline{R}_{Bx} = 6 - 2 = 4$ m

المركبة الرأسية لمتجه الإزاحة R_{By} $\underline{R}_{By} = 5 - 3 = 2$ m

مقدار متجه الإزاحة R_B $R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = 4.47$ m

اتجاه متجه الإزاحة R_B $\theta = \tan^{-1}(R_{By} / R_{Bx}) = 26.57^o$

حل بديل باستعمال جبر المتجهات:

شكل 20–1 يبين وحدة المتجه في الاتجاه الأفقي **i** وكذلك وحدة المتجه في الاتجاه الرأسي **j** فيكون:

متجه موضع النقطة B_1 هو $\underline{R}_1$ $\underline{R}_{B1} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$

متجه موضع النقطة B_2 هو $\underline{R}_2$ $\underline{R}_{B2} = 6\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$

متجه الإزاحة $\underline{R}_B$ $\underline{R}_B = \underline{R}_{B2} - \underline{R}_{B1}$

$$= (6-2)\,\mathbf{i} + (5-3)\,\mathbf{j} = 4\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$$

المركبة الأفقية لمتجه الإزاحة R_{Bx} $\underline{R}_{Bx} = 4\,\mathbf{i}$; $R_{Bx} = 4$ m

المركبة الرأسية لمتجه الإزاحة R_{By} $\underline{R}_{By} = 2\,\mathbf{j}$; $R_{By} = 2$ m

مقدار متجه الإزاحة R_B $R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = 4.47$ m

اتجاه متجه الإزاحة R_B $\theta = \tan^{-1}(R_{By} / R_{Bx}) = 26.57^o$

1.8 إزاحة الجسم الجامد Displacement of a rigid body

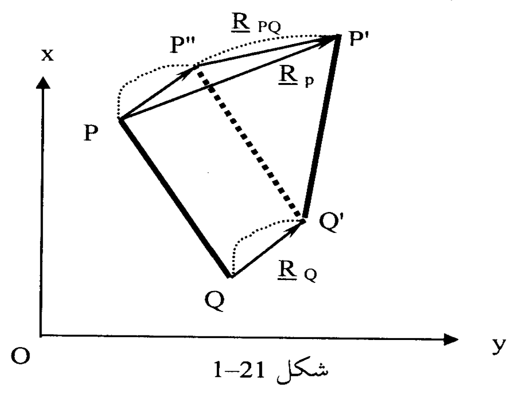
وتتحدد حركة الجسم الجامد بمعرفة حركة نقطة أو أكثر على الجسم . وشكل 21–1 يوضح حركة القضيب PQ إلي موضع جديد P'Q' (على أي مسار وليس بالضرورة على خط مستقيم) حيث إزاحة النقطة Q هي $\underline{R}_Q$ وإزاحة النقطة P هي $\underline{R}p$. ويمكن اعتبار هذه الحركة كانتقال القضيب إلى الوضع P"Q' ثم دورانه

حول النقطة 'Q إلى الوضع النهائي 'P'Q.

ويكون فرق الإزاحتين بين P,Q ويمثله المتجه $\underline{R}_{PQ}$ هو:

$$\underline{R}_{PQ} = \underline{R}_P - \underline{R}_Q \qquad (1-4)$$

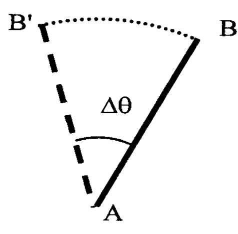
ويسمى فرق الإزاحتين هذا بالإزاحة النسبية (أي إزاحة P بالنسبة إلى Q) ويلاحظ أن الحركة الانتقالية البحتة من QP إلى "Q'P لا ينتج عنها فرق في السرعة بين P , Q. أما الدوران البحت من "Q'P إلى 'Q'P فهو المسئول عن وجود فرق في السرعة بين P,Q (أي إلى وجود سرعة نسبية بين P,Q).



شكل 21–1

1.9 السرعة والعجلة الزاوية، Angular velocity and acceleration

إذا دار القضيب AB المبين في شكل 22–1 عكس عقارب الساعة بمقدار الزاوية $\Delta\theta$ إلى الموضع الجديد 'AB في زمن قدره Δt فإن السرعة المتوسطة ω_{av} تكون:



شكل 22–1

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

وتكون السرعة اللحظية ω :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (1-5)$$

ووحدات ω هي rad/s أي زاوية دائرية/ثانية. فإذا كانت السرعة الزاوية للجسم معلومة كعدد لفات في الدقيقة (revolution per second r.p.m) فإن بعض المراجع تستخدم الرمز N للسرعة. ولتحويل الوحدات من r.p.m إلى rad/s تستعمل العلاقة

$$\omega = \frac{2\pi N}{60}\ .$$

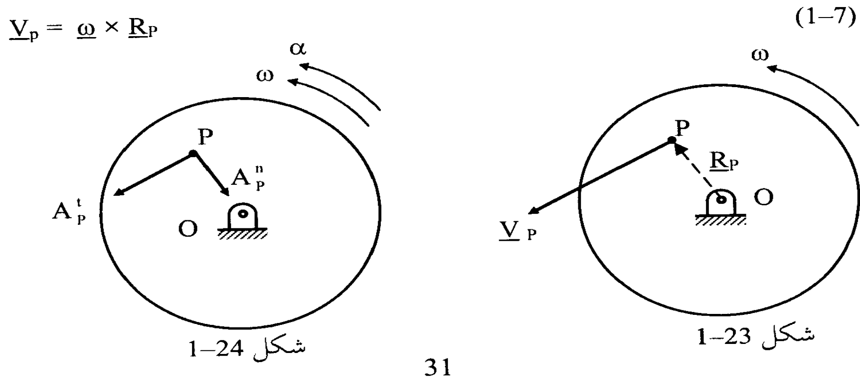
وتكون العجلة الدائرية للجسم α هي معدل تغير ω مع الزمن ووحداتها rad/s_2، أي:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (1-6)$$

ويلاحظ أن كلا من α , ω كمية متجهة ، أي أن لها مقدارا واتجاها. والاتجاه الموجب لهما يكون عموديا على مستوى الدوران (أي مستوى الورقة) وخارجا منها ناحية القارئ ، وهذا معناه أن اتجاه كل من α , ω الموجب يظهر في مستوى الصفحة على هيئة دوران في عكس اتجاه عقرب الساعة.

ويوضح شكل 23–1 جسما دائريا يدور بسرعة ω حول محور دوران ثابت O ، أي أن نقطة O لا تتحرك ولا تدور. فتكون سرعة P وهى نقطة مثبتة على الجسم الدائري وتدور معه هي :

$$\underline{V}_P = \underline{\omega} \times \underline{R}_P \qquad (1-7)$$



شكل 24–1

شكل 23–1

حيث RP هي المسافة من محور الدوران إلى نقطة P . ويجب تذكر أن المعادلة (1–7) هي معادلة اتجاهية، أي أن $\underline{V}p$ هو متجه يمثل سرعة النقطة P واتجاهه عمودي على $\underline{R}p$ وهو المتجه الذي يمثل موضع النقطة P ويبدأ من O (محور الدوران)، أما $\underline{\omega}$ فهي السرعة الزاوية ويمثلها متجه عمودي على مستوى الحركة. ويعتمد اتجاه $\underline{V}p$ (يمينا أو يسارا) على اتجاه ω ، فإذا كانت ω عكس عقرب الساعة كما هو موضح في شكل 23–1 فإنها تجعل المتجه $\underline{R}p$ يميل للدوران معها ولهذا تكون $\underline{V}p$ إلى اليسار . فإذا انعكس اتجاه ω يصير اتجاه $\underline{V}p$ إلى اليمين.

أما شكل 24–1 فيوضح مركبات عجلة نقطة P على نفس الجسم الدائري حيث يدور الجسم بسرعة ω وعجلة α . ويلاحظ أن نقطة P تتحرك على مسار دائري لأن O ثابتة ولذلك فإن عجلة P لها مركبتان: الأولى $\underline{A}^t_P$ وهي مماسة للمسار الدائري لنقطة P (أي في الحقيقة عمودية على $\underline{R}P$) ، والثانية $\underline{A}^n_P$ وهي عمودية على المسار الدائري لنقطة P (أي في الحقيقة عكس اتجاه المتجه $\underline{R}_P$).

وعلى هذا تكون $\underline{A}p$ هي عجلة النقطة P وهي محصلة المركبتين $\underline{A}^n_P$, $\underline{A}^t_P$ أي:

$$\underline{A}_p = \underline{A}^n_P + \underline{A}^t_P$$

ومقدار المحصلة هو:

$$A_p = \sqrt{(A^n_P)^2 + (A^t_P)^2} \qquad (1-8)$$

حيث المركبة المماسة $\underline{A}^t_P$ هي:

$$\underline{A}^t_P = \underline{\alpha} \times \underline{R}_P \qquad (1-9)$$

واتجاه هذه المركبة (يمينا أو يسارا) على اتجاه α ، فإذا كانت α عكس عقرب الساعة كما هو موضح في شكل 24–1 فإنها تجعل المتجه $\underline{R}_P$ يميل للدوران معها ولهذا تكون $\underline{A}^t_P$ إلى اليسار . فإذا انعكس اتجاه α يصير اتجاه $\underline{A}^t_P$ إلى اليمين. أما المركبة العمودية $\underline{A}^n_P$ فهي:

$$\underline{A}^n_P = -\omega_2 \underline{R}_P \qquad (1-10)$$

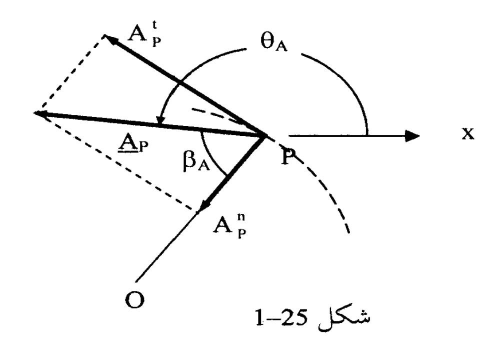
والإشارة السالبة في المعادلة (10–1) تدل على أن $\underline{A}_P^n$ عكس اتجاه $\underline{R}_P$ أي تشير دائما إلى مركز الدوران.

ولا يلزم أن يكون شكل الجسم دائريا حتى تنطبق المعادلات السابقة على النقط الواقعة عليه، بل إن أي نقطة مثل النقطة P المبينة في شكل 25–1 والتي تتحرك على مسار دائري مركزه O تنطبق عليها المعادلات السابقة.

وتكون الزاوية β_A بين $\underline{A}_P^n$ وبين $\underline{A}_P$ كما هو موضح في شكل 25–1 هي:

$$\beta_A = \tan^{-1} (A_P^t / A_P^n) \qquad (1-11)$$

ولحساب الزاوية β_A تؤخذ القيمة المطلقة لكل من المركبتين $\underline{A}_P^t$, $\underline{A}_P^n$ وتهمل الإشارة السالبة في أيهما إن وجدت. أما التعريف العلمي الصحيح لاتجاه العجلة $\underline{A}_P$ فهو الزاوية θ_A وهي الزاوية المقاسة عكس عقرب الساعة من الاتجاه الموجب للمحور x إلى المتجه $\underline{A}_P$ مقاسة عند قاعدة (ذيل) المتجه كما هو موضح في شكل 25–1.



شكل 25–1

مثال 3–1:

احسب سرعة النقطة Q وعجلة النقطة P على القرص الدائري المبين في شكل 26–1 والذي يدور بسرعة N = 110 r.p.m. وبعجلة $\alpha = 130 \text{ rad/s}^2$ ونصف قطره 15 cm.

الحل:

$\omega = 110(2\pi)/60 = 11.52$ rad/s

$V_Q = \omega\ R_{OQ} = 11.52\ (15) = 172.8\ cm/s$

واتجاه السرعة V_Q عمودي على الذراع OQ كما هو موضح برسم تخطيطي في شكل 27–1.

وتحسب المركبتان A_P^t , A_P^n من المعادلتين (9–1) , (10–1) وهما موضحتان برسم تخطيطي في شكل 27–1 :

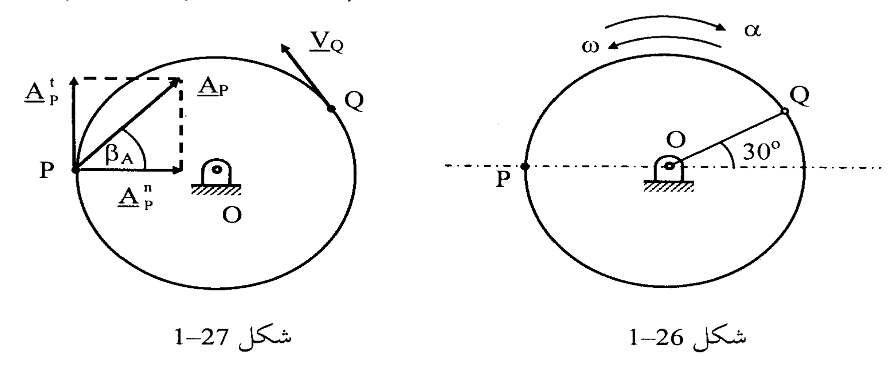
$A_P^t = \alpha RPO = (130)(15)=1950\ cm/s2$

$A_P^n = \omega 2RPO = (11.52)2(15) = 1990.57\ cm/s2$

وتكون المحصلة واتجاهها هما:

$A_P = (1950^2 + 1990.57^2)^{0.5} = 2786.61\ cm/s^2$

$\beta_A = \tan^{-1}(1950/1990.57) = 44.41^o$



شكل 27–1 شكل 26–1

1.10 الحركة النسبية والحركة المطلقة

إذا اعتبرنا حركة السيارة P المبينة في شكل 28–1 والتي تتحرك بسرعة 100 km/hr ناحية الشرق وكذلك حركة سيارة أخرى Q تتحرك بسرعة 80 km/hr في نفس الاتجاه فإن السرعات المذكورة هي السرعات المطلقة .بمعنى أن سرعة P مثلا هي 100 km/hr منسوبة إلى الأرض الثابتة ، وهذه السرعة يراها أي شخص يقف ساكنا على جانب الطريق. أما سرعة P كما يراها شخص راكب في السيارة Q فتسمى سرعة P بالنسبة إلى Q ويرمز لها بالرمز V_{PQ} وهي تحسب من المعادلة:

$\underline{V}_{PQ} = \underline{V}_P - \underline{V}_Q$ (1–12)

Q ⟶ $\underline{V}_Q = 80$ km/hr   P ⟶ $\underline{V}_P = 100$ km/hr

شكل 28–1

أي أن السرعة النسبية بين نقطتين هي الفرق الاتجاهي بين سرعتيهما. ويلاحظ ترتيب الرموز Q , P في المعادلة حيث يكون الشخص الملاحظ للحركة في الترتيب الثاني للرمزين. فإذا طبقنا هذه المعادلة (في هذه الحالة الفرق الاتجاهي يساوي الفرق العددي لأن السيارتين تتحركان على خط مستقيم) نجد أن $V_{PQ}=20$ km/hr وهذه الكمية موجبة بمعنى أن هذه السرعة هي ناحية الشرق ، أي أن الشخص الراكب في السيارة Q يرى السيارة P تسير بسرعة 20 km/hr إلى اليمين على الرسم مبتعدة عنه. أما سرعة Q كما يراها شخص راكب في السيارة P فتسمى سرعة Q بالنسبة إلى P ويرمز لها بالرمز V_{QP} وهي:

$\underline{V}_{QP} = \underline{V}_Q - \underline{V}_P$ (1–13)

والآن إذا طبقنا هذه المعادلة نجد أن $V_{QP}= -20$ km/hr وهذه الكمية سالبة بمعنى أن هذه السرعة تكون ناحية الغرب (إلى اليسار على الرسم) ، أي أن الشخص الراكب في السيارة P يرى السيارة Q تسير بسرعة 20 km/hr متقهقرة عنه. ويتضح من المناقشة السابقة وكذلك من المعادلتين أن:

$\underline{V}_{PQ} = -\underline{V}_{QP}$ (1–14)

ويجب ملاحظة أن المعادلات الثلاث السابقة هي معادلات اتجاهية والمثال التالي يوضح لك.

مثال 4–1

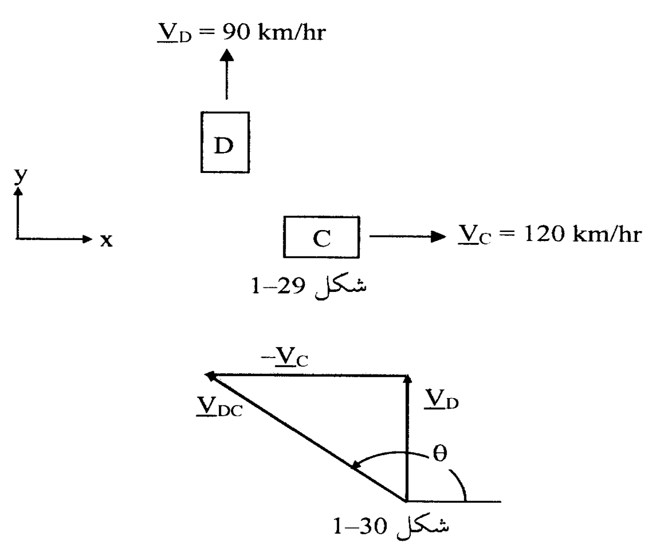
السيارة C المبينة في شكل 29–1 تتحرك بسرعة 120 km/hr ناحية الشرق أما السيارة D فتتحرك بسرعة 90 km/hr في اتجاه الشمال. احسب سرعة السيارة D بالنسبة إلى السيارة C.

الحل بالرسم:

الكمية $\underline{V}_{DC}$ هي سرعة السيارة D بالنسبة إلى السيارة C :

$\underline{V}_{DC} = \underline{V}_D - \underline{V}_C$

وتحل هذه المعادلة بالرسم كما في شكل 30–1 حيث يرسم المتجه $\underline{V}_D$ إلى أعلى بمقياس رسم مناسب ثم يرسم المتجه ($\underline{V}_C$ –) إلى اليسار (بنفس مقياس الرسم). فتكون المحصلة هي المتجه $\underline{V}_{DC}$ الذي يقاس طوله واتجاهه من الرسم فنجد أن مقدار السرعة النسبية V_{DC} هو 150 km/hr والزاوية $\theta = 143^o$.



شكل 29–1

شكل 30–1

الحل بالحساب:

نختار المحورين المتعامدين x , y كما هو واضح في شكل 29–1 ثم نكتب كل متجه سرعة بدلالة مركباته ثم نعوض في المعادلة (12–1) لإيجاد السرعة النسبية كمتجه:

$\underline{V}_C = 120\,\underline{\mathbf{i}}$

$\underline{V}_D = 90\,\underline{\mathbf{j}}$

$\underline{V}_{DC} = \underline{V}_D - \underline{V}_C = -\,120\,\underline{\mathbf{i}} + 90\,\underline{\mathbf{j}}$

والآن نحسب مقدار واتجاه السرعة النسبية:

$$V_{DC} = (120^2 + 90^2)^{0.5} = 150 \text{ km/hr}$$

ويمكن إيجاد θ مباشرة كما يلي:

*إذا كانت المركبة الأفقية V^x_{DC} موجبة:

$$\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{V^y_{DC}}{V^x_{DC}}\right) \qquad (1-15)$$

*إذا كانت المركبة الأفقية V^x_{DC} سالبة:

$$\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{V^y_{DC}}{V^x_{DC}}\right) + 180^o \qquad (1-16)$$

وهاتان المعادلتان تنتجان من ملاحظة أن الآلة الحاسبة والحاسوب يعطيان قيمة واحدة للزاوية عند استعمال الدالة $\tan^{-1}$ حيث تكون الزاوية الناتجة إما في الربع الأول أو الرابع وهذا صحيح إذا كانت المركبة الأفقية V^x_{DC} موجبة وفي هذه الحالة تستعمل المعادلة (1–15). على أنه إذا كانت الزاوية الناتجة من الآلة الحاسبة أو الحاسوب في الربع الأول مثلا فإن هناك زاوية أخرى في الربع الثاني لها نفس قيمة tan وتكون هذه هي الزاوية الصحيحة إذا كانت المركبة الأفقية V^x_{DC} سالبة وفي هذه الحالة تستعمل المعادلة (1–16). وبالمثل إذا كانت الزاوية الناتجة من الحاسوب في الربع الرابع وكانت المركبة الأفقية V^x_{DC} سالبة فإن الزاوية الصحيحة تكون في الربع الثالث وتستعمل المعادلة (1–16) لتعيين قيمتها.

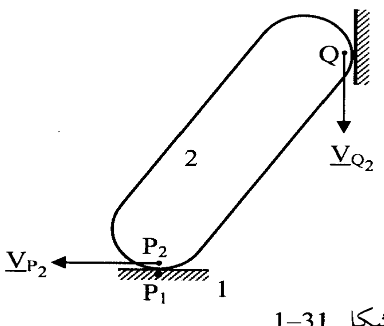
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{90}{-120}\right) + 180^o = 143.13^o$$

وقد أضيفت 180^o عند حساب الزاوية θ لأن المركبة الأفقية للمتجه $\underline{V}_{DC}$ سالبة (معادلة (1–16)).

ومعنى هذه النتيجة أن الراكب في السيارة C يرى السيارة D تتحرك بسرعة 150 km/hr في اتجاه 143.13^o من الشرق، بينما السرعة الحقيقية (المطلقة) للسيارة D هي 90 km/hr .

1.11 التلامس المباشر – الحركة الانزلاقية

كثير من أجزاء الآليات تدور بالتلامس مع أسطح أجزاء أخرى مع انزلاق أسطح التلامس على بعضها ، وشكل 31–1 يبين أبسط نموذج لمثل هذه الحالة حيث ينـــزلق الضلع 2 على مستوى أفقي أملس عند نقطة P ، وعلى مستوى رأسي أملس عند نقطة Q. ومن المهم إدراك أن التلامس بين الجسم 2 والأرض مثلا يتم بين نقطة على الجسم هي P_2 وبين نقطة على الأرض هي P_1 وهاتان النقطتان منطبقتان في اللحظة المبينة بالشكل ثم تفترقان بعد فترة زمنية قصيرة نتيجة استمرار الانزلاق بحيث يحدث التلامس على نقط أخرى. والانزلاق يحدث نتيجة لوجود حركة نسبية بين النقطتين المتلامستين P_1 , P_2 (أي أن سرعتي نقطتي التلامس غير متساويتان).



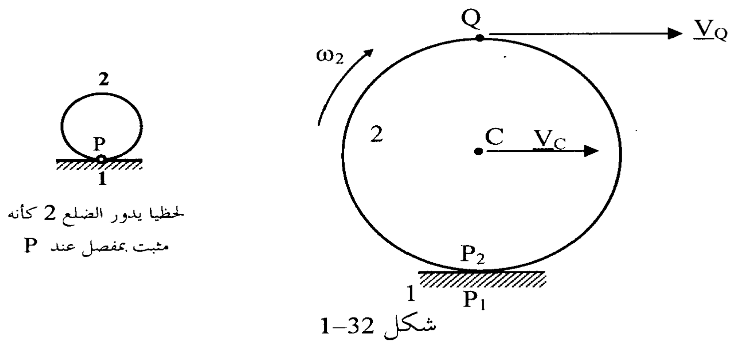
شكل 31–1

ومن المهم أيضا إدراك أنه في حالة الحركة الانزلاقية ، ومع وجود فرق في سرعتي نقطتي التلامس ، فإنه يجب أن يظل الجسمان متلامسين أثناء الحركة ولذلك فإن المركبة العمودية على سطح التلامس لسرعة كل من نقطتي التلامس P_1 و P_2 يجب أن تكون متساوية ، وحيث إن سرعة P_1 تساوي صفرا لذلك يجب أن تكون السرعة $\underline{V}_{P_2}$ موازية للمستوى الأفقي حتى تكون مركبتها في الاتجاه العمودي على سطح التلامس صفرا. وبنفس المنطق يجب أن تكون $\underline{V}_{Q_2}$ رأسية موازية للحائط الأملس الرأسي.

1.12 التدحرج بدون انزلاق

تحتوي الكثير من الآليات على عجلات أو تروس تدور بالتلامس مع أسطح أخرى بدون انزلاق أسطح التلامس على بعضها. وشكل (32–1) يبين عجلة تتدحرج بدون انزلاق على مستوى خشن. وأكثر الأمثلة شيوعا على مثل هذه الحالة هو إطار السيارة الذي قد لا يدرك البعض أنه مهما زادت سرعة السيارة فإن سرعة نقطة تلامس الإطار مع الأرض (النقطة P) يجب أن تساوي صفرا وإلا كانت السيارة في حالة انزلاق على الأرض وهو ما يحدث عند الضغط المفاجئ على الكوابح (الفرامل) أو عند انزلاق العجلات على الأرض بسبب وجود شحوم أو زيوت على الطريق وهو ما يشكل خطورة على سلامة القيادة.

وإذا أمعنا النظر نجد أن التلامس بين الإطار والأرض يتم بين نقطة على الإطار هي P_2 وبين نقطة على الأرض هي P_1 ويجب أن تكون سرعة نقطة تلامس الإطار مع الأرض (النقطة P_2) يجب أن تساوي صفرا لأن سرعة النقطة P_1 صفرا. وفي الحالة العامة التي يكون فيها الضلع 1 متحركا نجد أنه لكي تكون الحركة دحرجة بدون انزلاق فإن شرط ذلك هو أن تكون سرعتي نقطتي التلامس P_1 , P_2 متساويتين مقدارا واتجاها. وتسمى النقطة P مركزا لحظيا للسرعة بين الضلعين 1 , 2 .



شكل 32–1

وفي شكل (32–1) تكون النقطة P، وهي المركز اللحظي للسرعة بين الضلعين 1, 2 ، مكافئة تماما لحظيا لوصلة مفصلية hinge بين الضلعين 1 , 2 ولذلك يمكن إيجاد سرعة أي نقطة على الضلع 2 باستخدام المعادلة (5–1) . فمثلا

$\underline{V}_C = \underline{\omega}_2 \times \underline{R}_{CP}$ (1–17)

$\underline{V}_Q = \underline{\omega}_2 \times \underline{R}_{QP}$ (1–18)

مثال 5–1

تتحرك سيارة بسرعة 100 km/hr . احسب سرعة دوران الإطارات بفرض أن نصف القطر المكافئ للإطار هو 30 cm واحسب أيضا سرعة أعلى نقطة في الإطار ، أي نقطة Q المبينة في شكل (32–1)

الحل:

سرعة السيارة تساوى

(100 km/hr)(1000/3600) = 27.278 m/s

وهذه القيمة هي سرعة مركز الإطار ، أي أن $V_C = 27.78$ m/s وبالتعويض في المعادلة (17–1):

$V_C = \omega_2 \times R_{CP}$; $\omega_2 = (27.78)/(0.30)$; $\omega_2 = 92.6$ rad/s

$N_2 = (92.6)(60)/(2\pi) = 884.3$ r.p.m.

وبالتعويض في المعادلة (18–1)

$V_Q = \omega_2 \times R_{QP} = 92.6\ (0.60) = 55.56$ m/s

ومنها نلاحظ أن سرعة النقطة Q ضعف سرعة النقطة C .

مثال 6–1

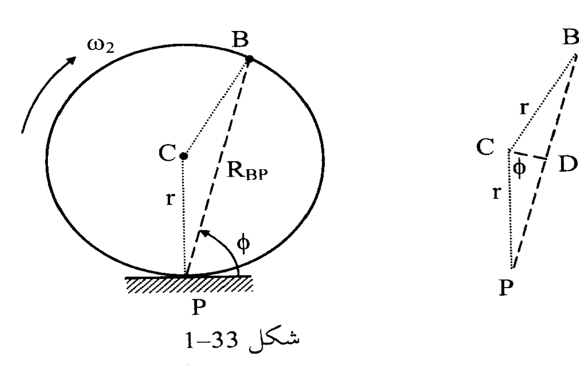
في السيارة المذكورة في المثال السابق ، احسب سرعة النقطة B الواقعة على الإطار والمبينة في شكل (33–1) بحيث إن الزاوية ϕ تساوي 60^o .

الحل:

استخدام المعادلة (7–1) يتطلب حساب المسافة R_{BP} . وبملاحظة أن الزاوية BPC تساوي الزاوية PBC وكل منهما تساوي $(90-\phi)$ تكون الزاوية BCP تساوي 2ϕ. ويمكن فيما يلي إثبات أن بعد أي نقطة على محيط الدائرة (مثل B) عن المركز اللحظي للسرعة P يساوي:



$$R_{BP} = 2\, r \sin \phi \qquad (1-19)$$
$$= 2\,(0.30)\,(\sin 60) = 0.52 \text{ m}$$



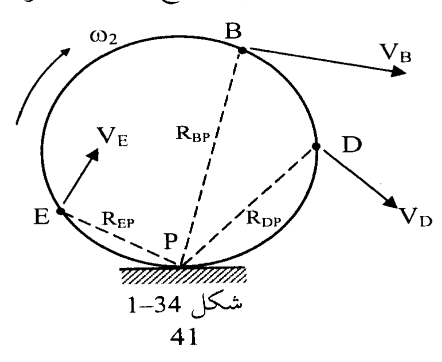
شكل 1-33

حيث r هو نصف قطر العجلة . ويمكن إثبات المعادلة (1-19) بمساعدة المثلث BPC المتساوي الساقين الموضح على يمين شكل (1-33) وفيه الخط DC عمودي على الخط BP ، ولأن الزاوية DPC تساوي $(90-\phi)$ تكون الزاوية DCP تساوي ϕ ، ومن المثلث قائم الزاوية BCP يكون الطول DP يساوي [CP sin (angle DCP)] أي يساوي $r \sin \phi$. والمسافة BP هي ضعف الطول DP.

وبالتعويض في المعادلة (1-5)

$$V_B = \omega_2 \times R_{BP} = 92.6\,(0.52) = 48.15 \text{ m/s}$$

واتجاه هذه السرعة عمودي على الذراع $\underline{R}_{BP}$ كما هو موضح في شكل(1-34).



شكل 1-34

ويبين شكل (1-34) أيضا اتجاه سرعات نقطتين أخرتين على محيط الدائرة هما E,D حيث السرعة $\underline{V}_D$ عمودية على الذراع $\underline{R}_{DP}$ بينما السرعة $\underline{V}_E$ عمودية على الذراع $\underline{R}_{EP}$ وحيث:

$$V_D = \omega_2 \times R_{DP}$$

وكذلك

$$V_E = \omega_2 \times R_{EP}$$

الفصل الثاني
الآليات وحركتها

هذا الفصل يناقش بعض أنواع الآليات شائعة الاستعمال ويصف حركتها مركزا على استعمال الرسم في معظم الأحوال لوصف هذه الحركة. أما الفصل القادم فيركز على استعمال الطرق التحليلية لدراسة الحركة.

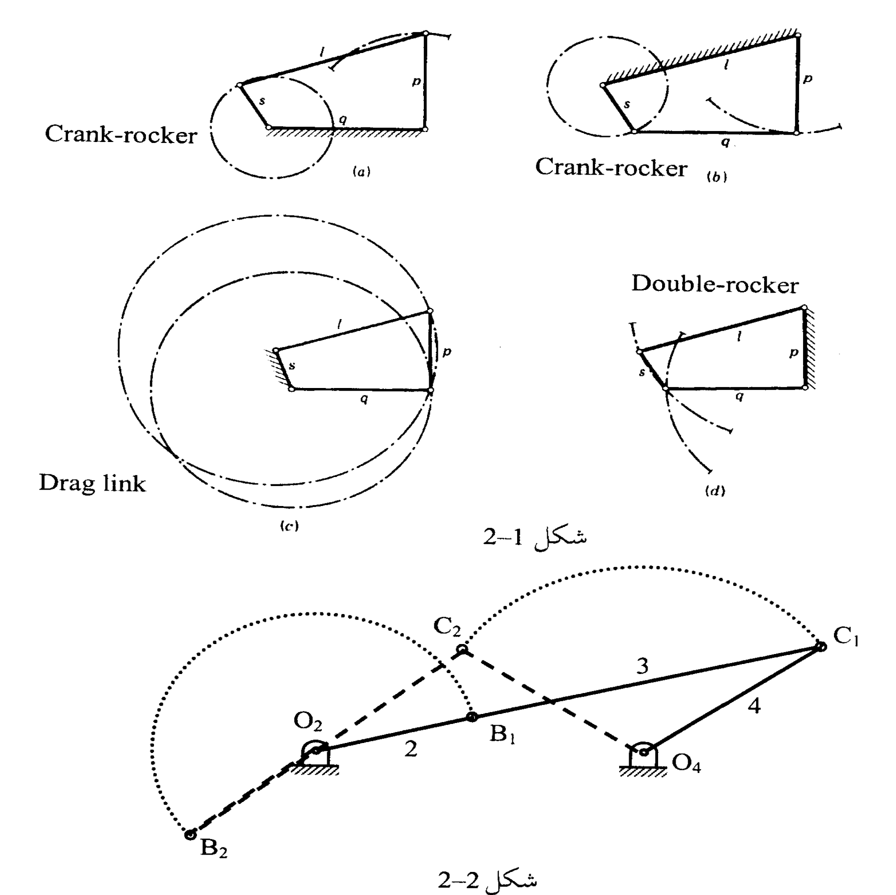
2.1 آلية القضبان الأربعة Four bar linkage

تتكون هذه الآلية من أربعة قضبان مستقيمة متصلة مع بعضها بوصلات دوارة hinges (أي تسمح بدوران الأضلاع بالنسبة لبعضها) ، وهي من أكثر الآليات شيوعا. ويوضح شكل 2–1(a) هذه الآلية حيث الضلع s هو القائد driver ، وتكون الحركة الخارجة عند الضلع p وهو التابع follower ، بينما الضلع l هو الرابط (ناقل الحركة) coupler . وإذا استعمل محرك لإدارة الضلع s فإنه من الأهمية التأكد أن أبعاد الأضلاع تسمح بأن يتحرك s ليكمل دائرة كاملة. ويمكن التأكد من ذلك باستعمال قانون جراشوف Grashof's Law والذي يتلخص في أنه تحدث حركة دائرية كاملة بين ضلعين في الآلية إذا تحقق الشرط الآتي :

$$s + l < q + p \tag{2–1}$$

حيث s هو طول أقصر ضلع ، l هو طول أطول ضلع ، p و q هما أطوال الضلعين الآخرين. فإذا تحقق هذا الشرط فأن أحد الضلعين (s مثلا) يدور دورة كاملة بينما يتذبذب الضلع p على قوس دائري كما في شكلي 2–1(a,b) . وتسمى الآلية في هذه الحالة بآلية الدوار والمتذبذب crank-rocker أما إذا ثبت الضلع s ، كما في شكل 2–1(c) ، فإن الضلعين l , q يدوران دورة كاملة وتسمى هذه بالآلية الدوارة Drag – link . والبديل الرابع الموضح في شكل 2–1 (d) يسمى الآلية ذات الذبذبتين double-rocker .

وفي حالة آلية الدوار والمتذبذب crank-rocker فإنه يمكن تعيين مراكز السكون أي dead centers وهي التي عندها تتوقف حركة الضلع 4 لحظيا كما هو موضح في شكل 2–2 .



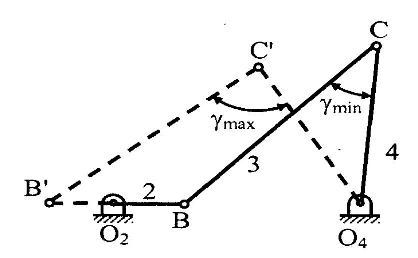
شكل 2-1

شكل 2-2

فعندما يدور الضلع 2 دورة كاملة يتذبذب الضلع 4 على القوس C_1C_2 وتتعين النقطة C_1 عندما يكون الطول O_2C_1 مساويا إلى ($O_2C_1 = r_3 + r_2$) حيث r_2 و r_3 هما طولا الضلعين 2 و 3 بالترتيب ، بينما تتعين النقطة C_2 عندما يكون الطول O_2C_2 مساويا إلى ($O_2C_2 = r_3 - r_2$) . والنقطتين C_1 , C_2 هما أقصى نقطتين تصل إليها الوصلة C وتكون سرعتها عندهما صفرا.

وتعتبر قيمة الزاوية γ المبينة في شكل 2-3 إحدى وسائل الحكم على جودة

تصميم آلية الأربعة قضبان وهي تسمى زاوية النقل transmission angle وهي الزاوية بين الضلع 4 (وهو التابع) والضلع 3 (وهو الرابط coupler) .



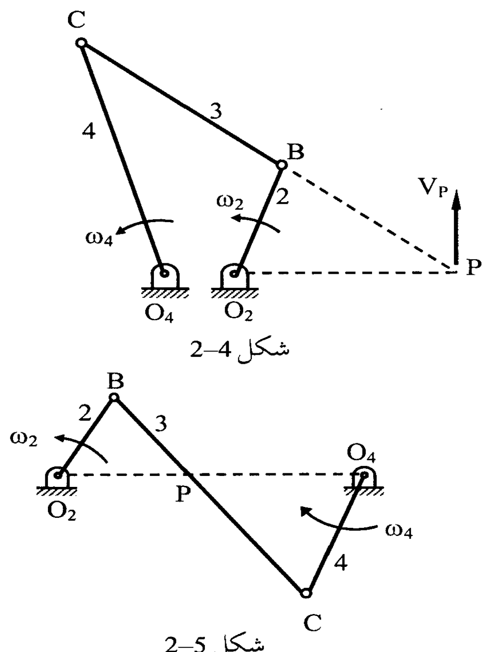
شكل 3–2

ويمكن إثبات أن نسبة العزم الخارج عند الضلع 4 (Q_4) إلى العزم الداخل عند الضلع 2 (Q_2) تتناسب مع ($\sin\gamma$) . وتسمى النسبة $\frac{Q_4}{Q_2}$ بالفائدة الميكانيكية . Mechanical advantage وعلى ذلك فإذا كانت قيمة γ صغيرة ، تتضاءل هذه النسبة وتصبح الآلية عرضة للتوقف عن العمل نتيجة أقل مقاومة من الاحتكاك . ولهذا لابد من تصميم الآلية بحيث تكون قيمة γ أكبر ما يمكن. وكقاعدة عامة يمكن الحكم على تصميم الآلية بالجودة إذا كانت أقل قيمة للزاوية γ أكبر من حوالي 40 درجة. ويمكن تعيين قيمة γ_{max} وكذلك γ_{min} كما هو موضح في شكل 3–2 حيث يكون الضلع 2 منطبقا على خط المراكز O_2O_4 في هذين الوضعين.

ويلاحظ في آلية الأربعة قضبان إمكانية حساب سرعة دوران الضلع التابع ω_4 بدلالة سرعة دوران القائد ω_2 باستعمال نظرية نسبة السرعة الزاوية Angular velocity ratio theorem. فشكل 4–2 يوضح النقطة P وهي تقاطع امتداد الضلع 3 مع خط المراكز O_2O_4 . على ذلك يكون:

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_4P} \qquad (2\text{–}2)$$

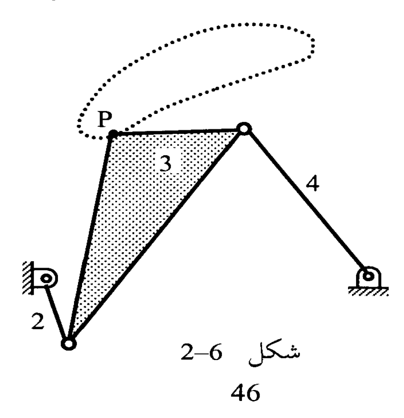
ويلاحظ أن هذه النسبة تكون موجبة (أي أن ω_2 , ω_4 لهما نفس الاتجاه) إذا كانت P تقع خارج الخط O_2O_4 كما في شكل 4–2. أما إذا وقعت P بين المركزين O_2 , O_4 كما في شكل 5–2 فإن النسبة تكون سالبة (أي أن السرعتين في اتجاهين متعاكسين).



شكل 4–2

شكل 5–2

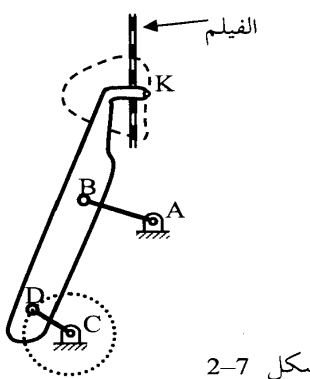
وهناك ميزة أخرى لآلية القضبان الأربعة ساهمت في سعة انتشارها على مر السنين وهي أن النقط المختلفة على الضلع الرابط 3 coupler تتحرك على مسارات مختلفة مما يتيح استعمال مثل هذه الآلية البسيطة لأداء مهام تحتاج إلى مسارات معقدة.



شكل 6–2

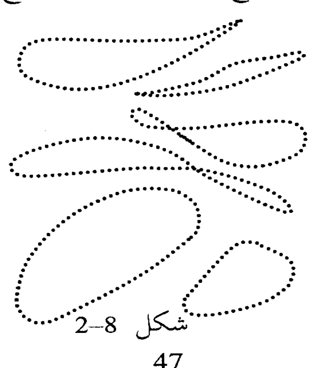
ويوضح شكل 6–2 مسار النقطة P التي هي جزء من الضلع 3 . وهذا المسار المعقد تم الحصول عليه بهذه الآلية البسيطة.

ومثال لاستخدام آلية الأربعة قضبان هو الآلية التي تستعمل في آلات العرض السينمائي وهي مرسومة في شكل 7–2 الذي يوضح مسار النقطة K التي هي جزء من الرابط BD. فبينما يدور الضلع CD دورة كاملة يتحرك الحرف المدبب عند K ليدخل أحد فتحات شريط الفيلم ليجذبه إلى أسفل مسافة صورة واحدة ثم يتحرك هذا الحرف المدبب خارج فتحة الفيلم ويتحرك لأعلى ليعود فيدخل في فتحة أعلى من فتحات الفيلم ثم يعيد الكرة مع استمرار دوران CD .



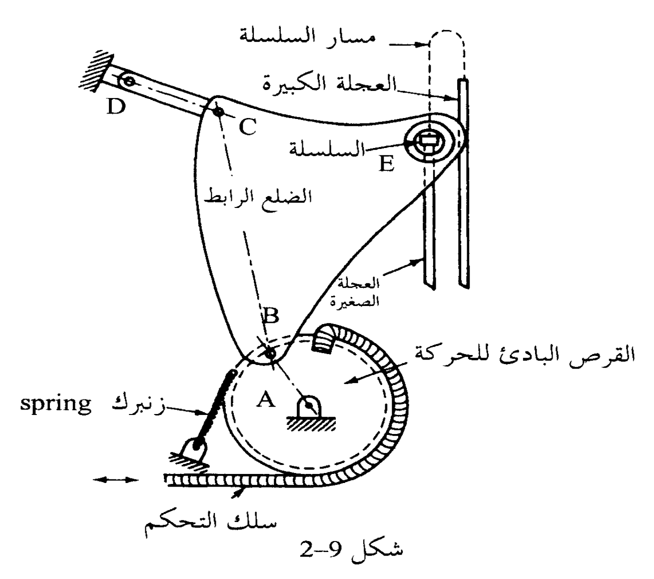
شكل 7–2

ويوضح شكل 8–2 بعض المسارات المعقدة التي يمكن الحصول عليها من نقط الضلع الرابط حسب أبعاد الأضلاع وكذلك حسب وضع النقطة نفسها على الضلع الرابط.



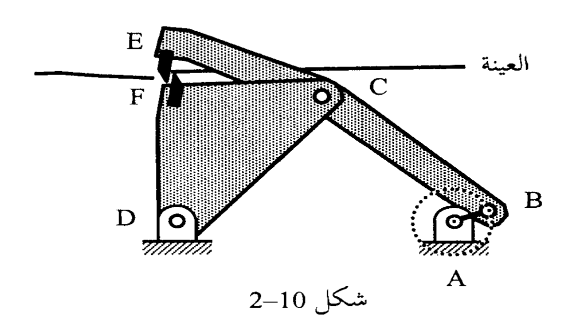
شكل 8–2

ويبين شكل 9-2 آلية رباعية ABCD تستعمل لتغيير السرعة في الدراجة الهوائية bicycle حيث يؤدي جذب سلك التحكم إلى اليسار إلى دوران القرص البادئ للحركة (أي دوران الخط AB) فتتحرك النقطة E (وهي نقطة ثابتة في الضلع الرابط BC وعند هذه النقطة تكون السلسلة عمودية على مستوى الرسم) على المسار المبين بالخط المتقطع لتنتقل السلسلة من العجلة المسننة sprocket الصغيرة إلى العجلة المسننة الكبيرة وبالعكس مما يؤدي إلى تغيير نسب السرعة للدراجة أثناء الحركة.



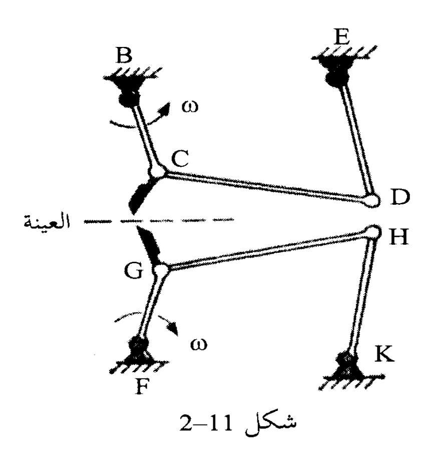
شكل 9-2

ويبين شكل 10-2 آلية رباعية ABCD تستخدم لقطع العينات وفيها يمتد الضلع الرابط coupler (ويسمى أيضا ذراع التوصيل) وهو BC ويثبت عليه حد قاطع عند النقطة E بالإضافة إلى حد قاطع آخر عند النقطة F وبذلك يكتسب الحدان القاطعان سرعة خطية أفقية مما يسمح بأن تستعمل الآلية للقطع "على الطاير" on the fly أثناء حركة العينة إذا كانت سرعة العينة مساوية لسرعة الحدين القاطعين وبذلك لا يلزم إيقاف العينة لقطعها وهذا يؤدي إلى إسراع عملية الإنتاج.



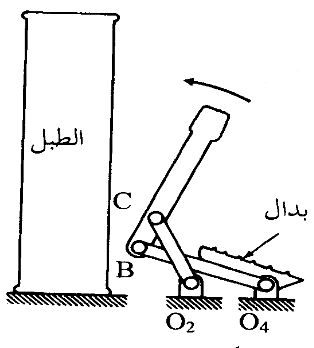
شكل 2–10

ويبين شكل 2–11 الآليتين الرباعيتين BCDE و FGHK المتطابقتين في الأبعاد والمثبت في الضلع الرابط لكل منهما حد مسنون ليتم قطع العينة على الطاير وتتميز هذه الآلة بأنها توفر قوة قطع عالية وثابتة القيمة أثناء تنفيذ عملية القطع.



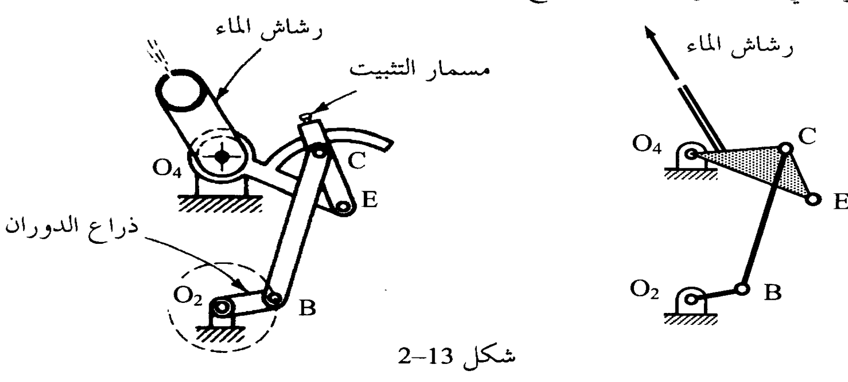
شكل 2–11

ويبين شكل 2–12 آلية رباعية O_2CBO_4 وفيها يمتد الضلع الرابط coupler وهو BC حتى يكون مطرقة لدق الطبل drum وذلك بالضغط بالقدم على البدال . pedal



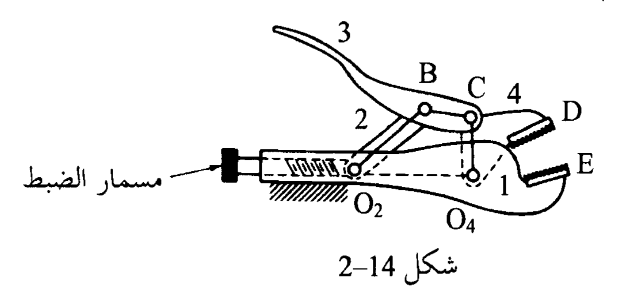
شكل 2–12

ويبين الجزء الأيسر من شكل 2–13 آلة رشاش المياه sprinkler وهي الآلية الرباعية O_2BCO_4 وفيها تخرج المياه من فتحة مثبتة في الضلع الهزاز rocker (وهو الضلع CO_4) وبذلك يتذبذب الماء المندفع من الرشاش لري الأرض على جانبي الجهاز. ويوضح الجزء الأيمن من الشكل مخطط تحليل الحركة للآلية kinematic diagram الذي يبين بوضوح الذراع الهزاز CO_4 وهو الذي يصبح ثابت الطول عند ربط مسمار التثبيت المبين في الجزء الأيسر من الشكل. ويمكن زيادة أو نقص الزاوية التي يتذبذب فيها رشاش الماء عن طريق فك مسمار التثبيت وتغيير مكان الوصلة C على الضلع المقوس ثم ربط مسمار التثبيت مرة أخرى مما يؤدي إلى تغيير الطول CO_4 وبالتالي تغيير زاوية ذبذبة الذراع الهزاز CO_4 ومعه رشاش الماء.



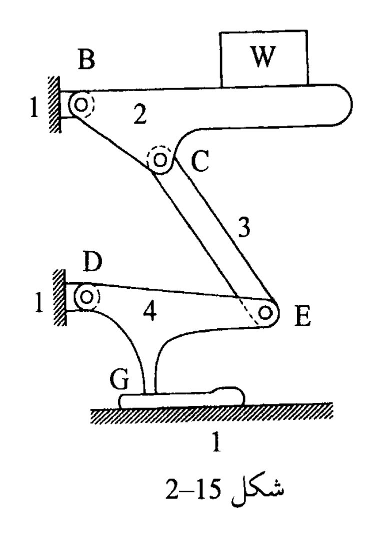
شكل 2–13

ويبين شكل 14–2 بنسة كبس (grip pliers) تستعمل للقبض على العينات أو القطع المطلوب تشغيلها وهي عبارة عن الآلية الرباعية O_2BCO_4 وفيها يتم الضغط باليد على الذراع 3 (الذي هو امتداد الضلع الرابط CB) فيؤدي ذلك إلى اقتراب الفك D من الفك E ويولد ذلك قوة ضغط كبيرة على أي جسم يتواجد بين الفكين . ويستعمل مسمار الضبط لتحريك الوصلة O_2 (أي تغيير المسافة O_2O_4) وذلك لتضييق المسافة بين الفكين للقبض على الأجسام الصغيرة ، أو توسيعها للقبض على الأجسام الكبيرة .



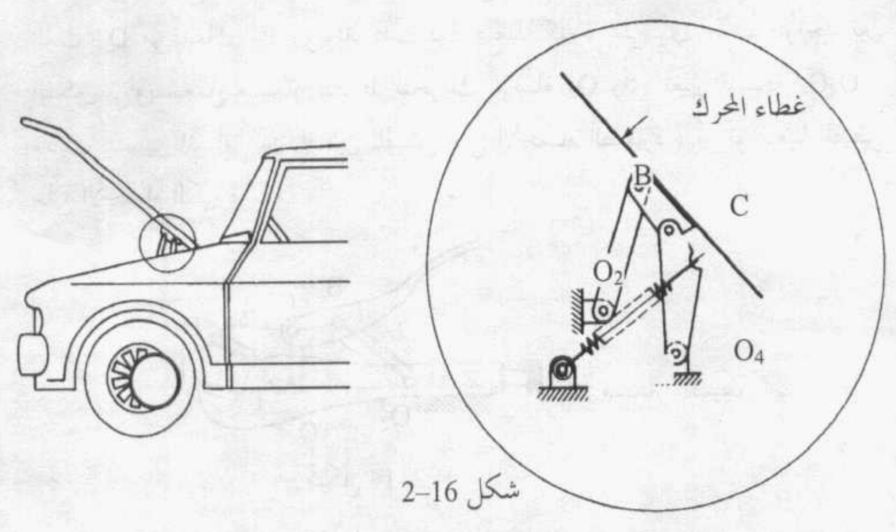
شكل 14–2

ويوضح شكل 15–2 الآلية الرباعية BCED التي تستعمل لكبس الأجسام عند النقطة G حيث يمكن إثبات أن الضغط بقوة W على الضلع 2 في الموضع المبين بالشكل ينتج عنه قوة عند G مقدارها يبلغ أضعاف القوة W .



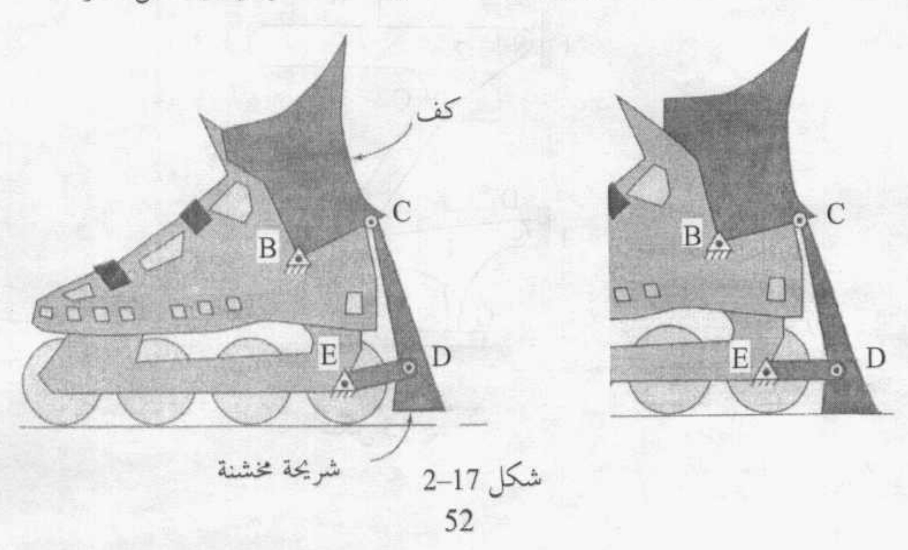
شكل 15–2

ويوضح شكل 2–16 تطبيقا آخر تستعمل فيه الآلية الرباعية O_2BCO_4 لفتح وإغلاق غطاء المحرك في السيارات (الزنبرك spring ليس ضلعا جامدا ويهمل في تحليل الحركة).



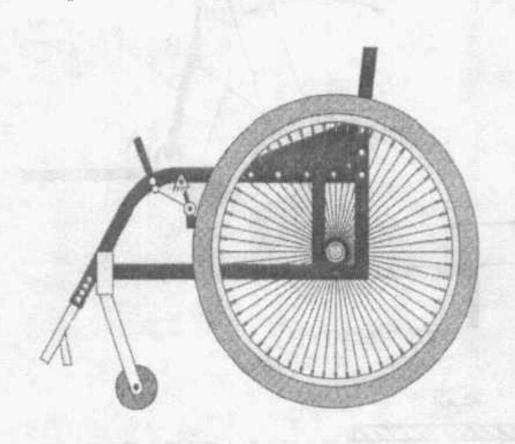
شكل 2–16

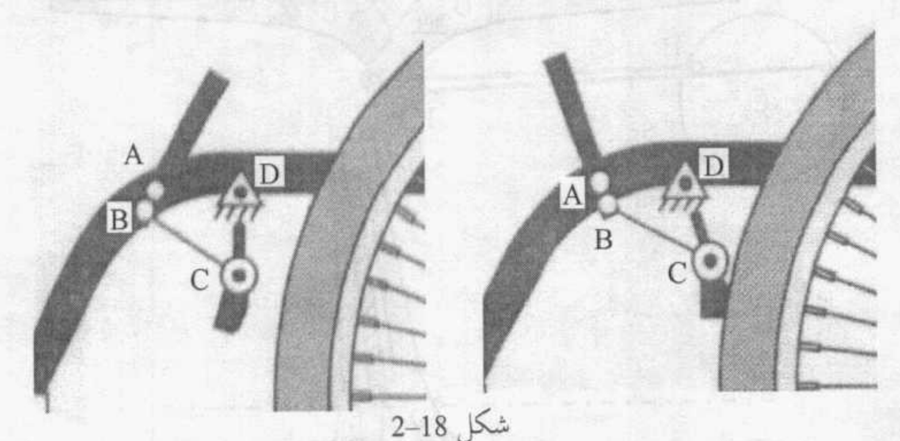
ويوضح شكل 2–17 تطبيقا آخر تستعمل فيه الآلية الرباعية BCDE لإيقاف حركة حذاء التزلج ذى العجلات roller skates حيث يبين الشكل الأيسر الآلية في وضع السماح بالحركة. ولتهدئة السرعة أو إيقاف الحركة بالكامل يقوم الشخص المتزلج بدفع الكف cuff بساقه إلى الخلف فتدور الآلية كما هو مبين بالشكل الأيمن لتلتصق الشريحة المخشنة بالأرض وتتولد بذلك قوة احتكاك تؤدي إلى تقليل السرعة.



شكل 2–17

ويوضح شكل 2-18 تطبيقا آخر تستعمل فيه الآلية الرباعية ABCD لإيقاف حركة الكرسي ذي العجلات wheel chair المبين أعلى الشكل والذي يستخدمه المرضى والمعاقون حيث يبين الشكل الأسفل (يسار) الآلية في وضع السماح بالحركة. ولتهدئة السرعة أو إيقاف الحركة بالكامل يقوم الشخص المستخدم للكرسي بدفع الذراع AB فتدور الآلية كما هو مبين بالشكل الأسفل (يمين) لتلتصق الشريحة المخشنة بالعجلة وتتولد بذلك قوة احتكاك تؤدي إلى تقليل سرعة الكرسي أو إيقافه.

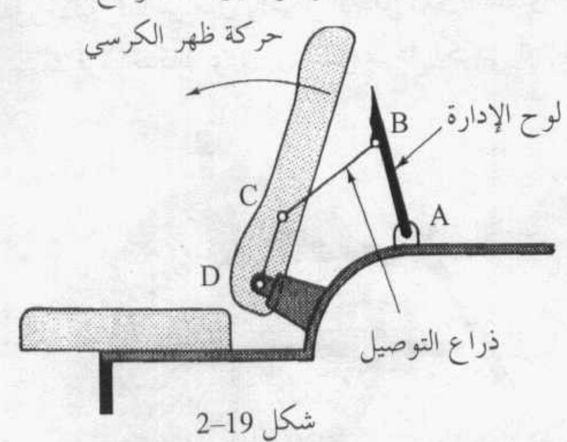




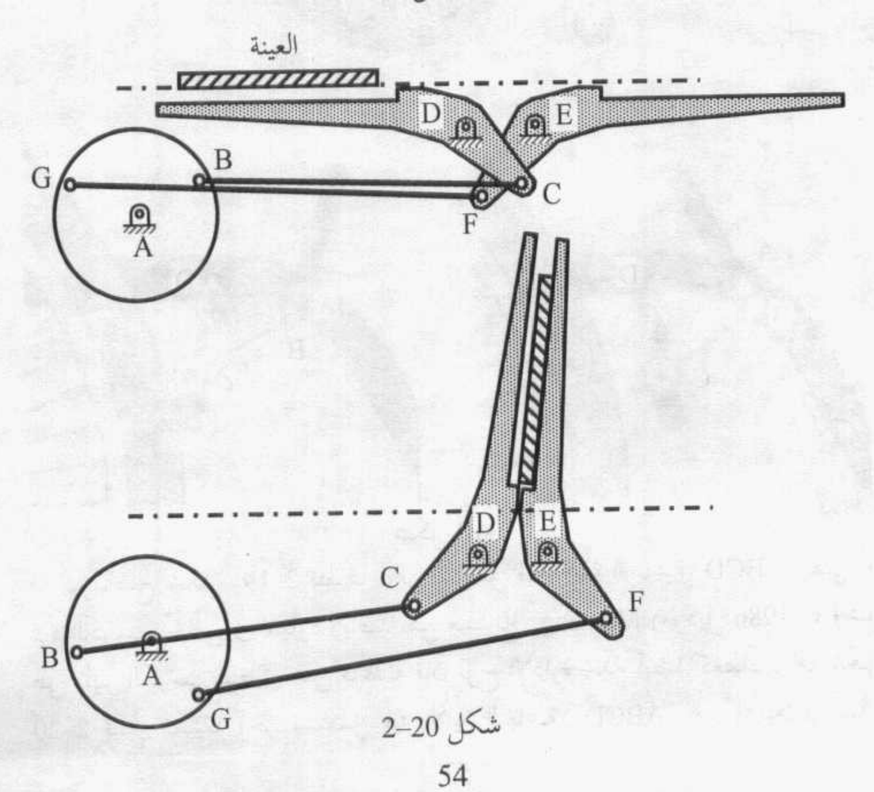
شكل 2-18

ويوضح شكل 2-19 تطبيقا آخر تستعمل فيه الآلية الرباعية ABCD لطي أو فرد الكرسي الخلفي في سيارة رياضية هي مستانج Mustang (موديل 1986) ، وعند طي ظهر الكرسي لينطبق على قاعدته فإن لوح الإدارة يخدم أيضا كغطاء . أما شكل 2-20 فيبين تطبيقا آخر تستعمل فيه الآلية الرباعية ABCD مع الآلية الرباعية

AGFE لقلب العينة على الوجه الآخر حيث تدور الآليتان معا نتيجة لدوران القرص الذي يحتوي ذراعي الإدارة AB و AG لتلتقيان في الوضع المبين أسفل الشكل والذي فيه تكون الآليتان مائلتين عن الخط الرأسي قليلا بحيث تنتقل العينة من الذراع الأيسر إلى الذراع الأيمن (مع الانقلاب على الوجه الآخر) بسبب كمية الحركة (momentum) المخزونة في العينة عند وصولها إلى هذا الموضع.

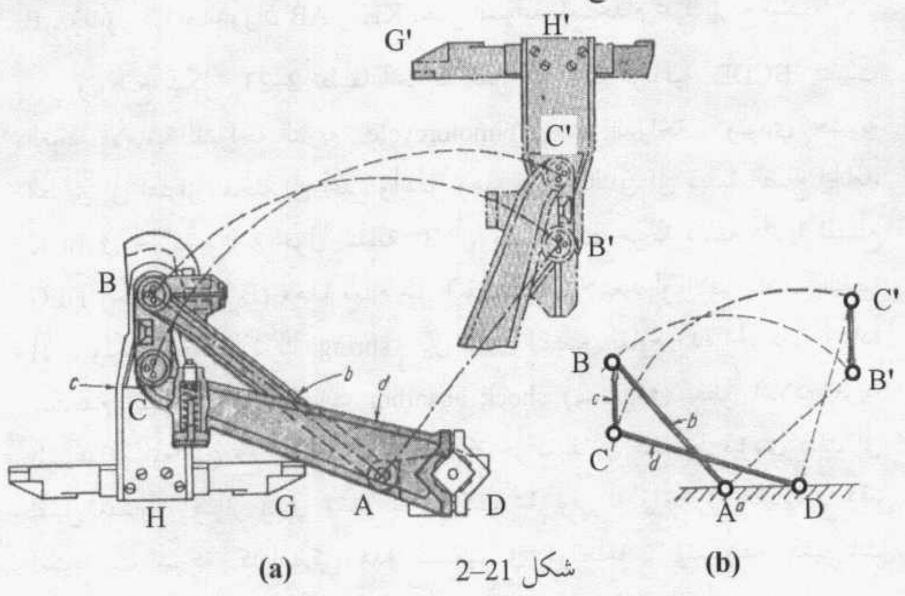


شكل 19–2



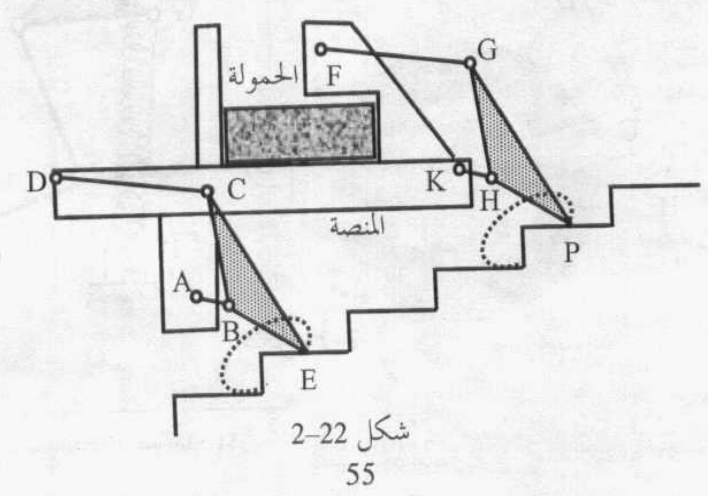
شكل 20–2

ويوضح شكل 2-21(a) تطبيقا آخر تستعمل فيه الآلية الرباعية ABCD لقلب العينة (المثبتة على السطح HG) على وجهها الآخر. وكما يوضح مخطط تحليل الحركة للآلية في شكل 2-21(b) فإن اتجاه الضلع الرابط BC المبين على يسار الشكل يتغير إلى الوضع المعكوس C'B' المبين على يمين الشكل وبذلك ينقلب حامل العينة (السطح HG) بمقدار 180^o إلى الوضع G'H'.



(a) شكل 2-21 (b)

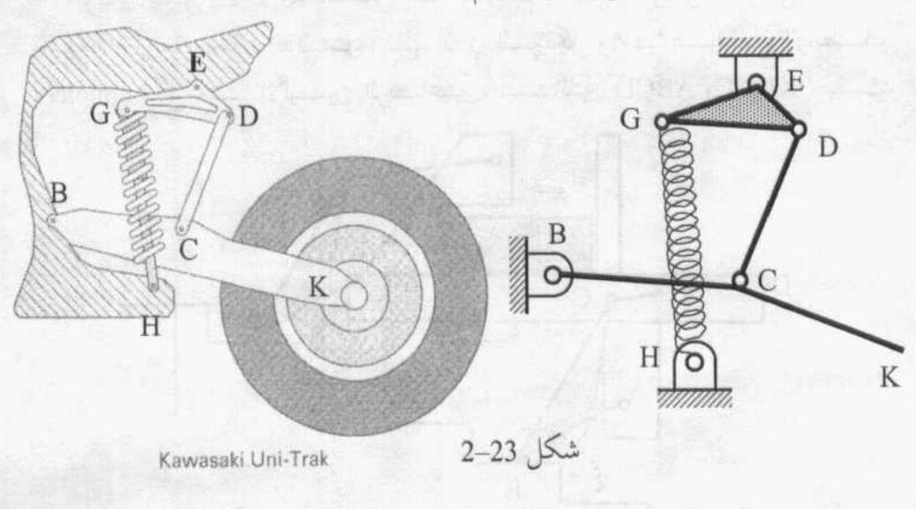
ويبين شكل 2-22 آلة تستعمل لصعود السلم بالحمولة الموجودة على المنصة باستخدام أربعة أرجل: اثنان منهما تظهران في الشكل وهما الضلعان الرابطان couplers لكل من الآليتين الرباعيتين المتماثلتين ABCD وKHGF حيث



شكل 2-22

ترتكز كل منهما على السلم على النقطة E في الأولى والنقطة P في الثانية ، أما الرجلان الباقيتان فهما الضلعان الرابطان لآليتين رباعيتين مماثلتين على الجانب المقابل من المنصة ، وهاتان الرجلان تكون واحدة منهما على الدرجة الأسفل من الدرجة التي عليها النقطة E والأخرى منهما على الدرجة الأسفل من الدرجة التي عليها النقطة P . ويدور ذراعا الدوران AB و KH بنفس السرعة باستخدام محرك لرفع المنصة[(1)].

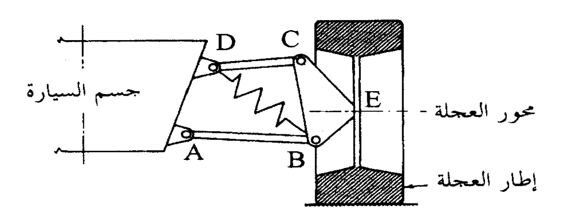
ويوضح شكل 2–23 تطبيقا آخر تستعمل فيه الآلية الرباعية BCDE لتثبيت العجلة الأمامية للدراجة النارية motorcycle في جسم الدراجة. وتؤدي خشونة الطريق إلى اهتزاز العجلة إلى أعلى وأسفل وهذا يؤدي بالتالي إلى ذبذبة الضلع الجامد BCK في حركة دائرية حول النقطة B ، ويتبع ذلك حركة ذبذبة دائرية للضلع DEG (حول النقطة E) وهذا معناه ميل النقطة G للابتعاد أو الاقتراب من النقطة H ، ولكن وجود الزنبرك spring بين هاتين النقطتين يقاوم هذه الحركة. وعادة يستخدم أيضا ماص للصدمات shock absorber (يسمى في بعض البلاد العربية المساعد أو المعاون) مع الزنبرك لتوليد مقاومة لحركة هاتين النقطتين فيؤدي ذلك إلى تقليل مقدار الاهتزاز الذي يشعر به الراكب مما يوفر له راحة في القيادة . وقد استخدمت شركة كاواساكي هذا التصميم في دراجاتها ، وتستخدم الشركات الأخرى تصميمات قريبة من هذا التصميم.



شكل 2–23

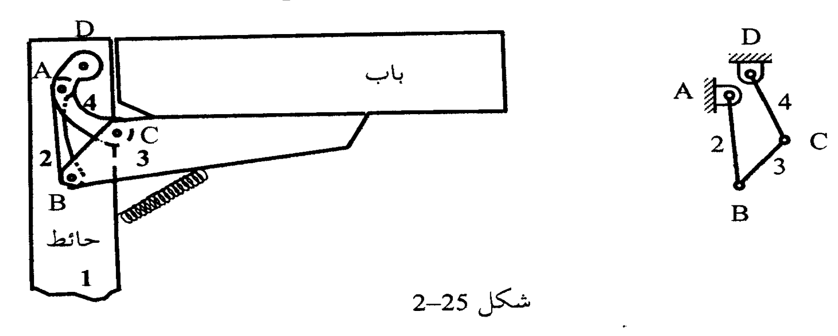
(١) انظر كتاب Erdman صفحة 81-83.

ويوضح شكل 2-24 تطبيقا مماثلا تستعمل فيه الآلية الرباعية ABCD لتثبيت عجلة السيارة في هيكلها عند النقطة E وهي نقطة على الضلع الرابط BC. وتؤدي خشونة الطريق إلى اهتزاز العجلة إلى أعلى وأسفل وهذا يؤدي بالتالي إلى ذبذبة الضلع BC ، ويتبع ذلك ميل النقطة B للابتعاد أو الاقتراب من النقطة D ، ولكن وجود الزنبرك spring بين هاتين النقطتين يقاوم هذه الحركة وهذا (بالإضافة إلى ماص الصدمات) يؤدي إلى تقليل الاهتزازات التي يشعر بها الركاب.



شكل 2-24

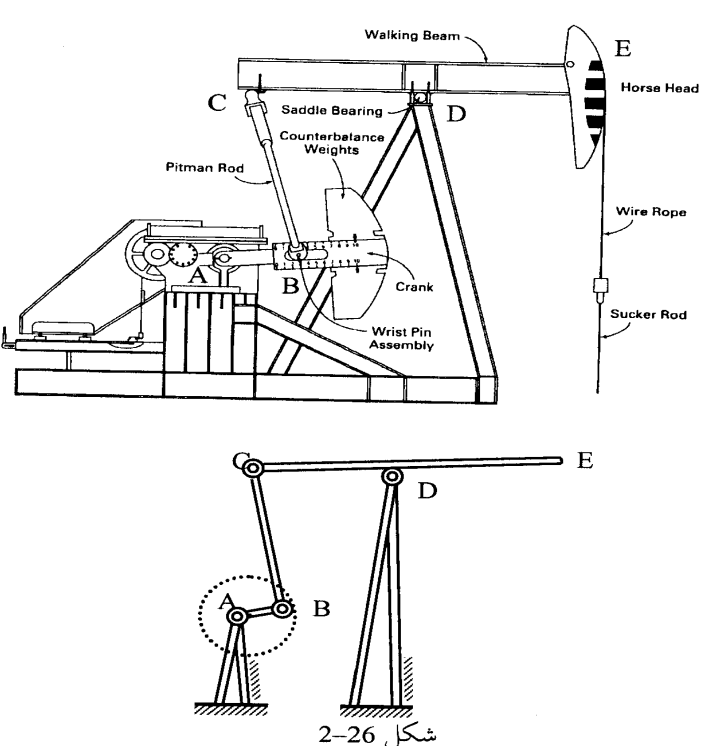
ويوضح شكل 2-25 تطبيقا آخر تستعمل فيه الآلية الرباعية ABCD لتثبيت باب سميك في الحائط ويبين الجزء الأيمن من الشكل مخطط تحليل الحركة للآلية kinematic diagram الذي يبين الآلية الرباعية بوضوح.



شكل 2-25

ويوضح شكل 2-26 تطبيقا آخر تستعمل فيه الآلية الرباعية في إدارة مضخة لسحب النفط من باطن الأرض ، حيث يبين الرسم العلوي تخطيطا كاملا لآلة الضخ

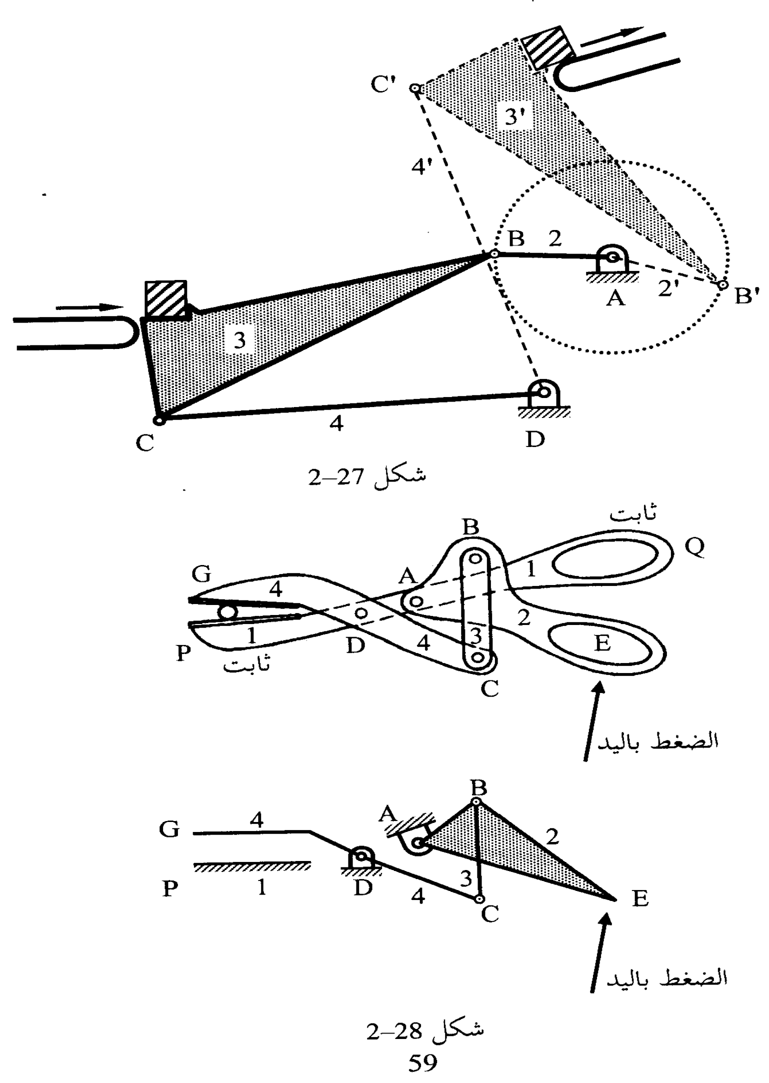
التي اعتمدها المعهد الأمريكي للبترول (AIP) ويبين الجزء الأسفل من الشكل مخطط تحليل الحركة للآلية kinematic diagram الذي يبين أن الآلة الكاملة تتكون أساسا من الآلية الرباعية ABCD وفيها النقطة E تقع على امتداد الضلع CD وعندها يتم تثبيت قطعة مقوسة (تبدو كرأس حصان) معلق فيها حبل معدني يستعمل لتشغيل المضخة ، ويكون شكل القطعة المقوسة بحيث يظل هذا الحبل رأسيا أثناء دوران الآلية الرباعية.



شكل 2–26

ويوضح شكل 2–27 حالة أخرى تستعمل فيها الآلية الرباعية ABCD في نقل المشغولات (مثل الصناديق كما في الشكل) من السير (الحامل المتحرك) belt conveyor الأسفل إلى الأعلى ، وفي هذه الحالة يكون شكل الضلع الرابط BC

مناسبا لحمل المشغولات كما يظهر في الوضع الأسفل للآلية ABCD وكذلك الوضع الأعلى لها AB'C'D المرسوم بخطوط متقطعة.



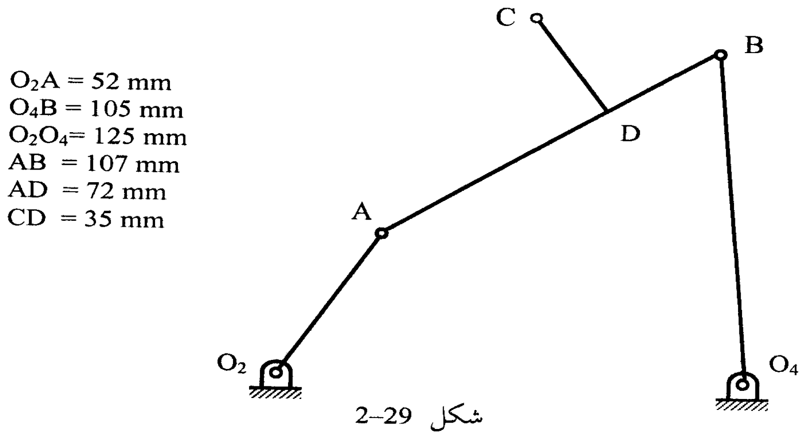
شكل 27–2

شكل 28–2

ويوضح شكل 28-2 قصافة snip تتكون أساسا من الآلية الرباعية ABCD حيث يعتبر الضلع 1 ثابتا وتنسب إليه حركة باقي الأضلاع ويوضح الجزء الأسفل من الشكل مخطط تحليل الحركة للآلية kinematic diagram الذي يبين أن الضغط على النقطة E على امتداد الضلع 2 يؤدي إلى إطباق الفك G على الفك P بقوة كبيرة (لاحظ أن CDG هو ضلع واحد متماسك).

مثال 1-2

ارسم مسار نقطة C في آلية الأربع قضبان المبينة في شكل 29-2 حينما يدور الضلع O_2A دورة كاملة.

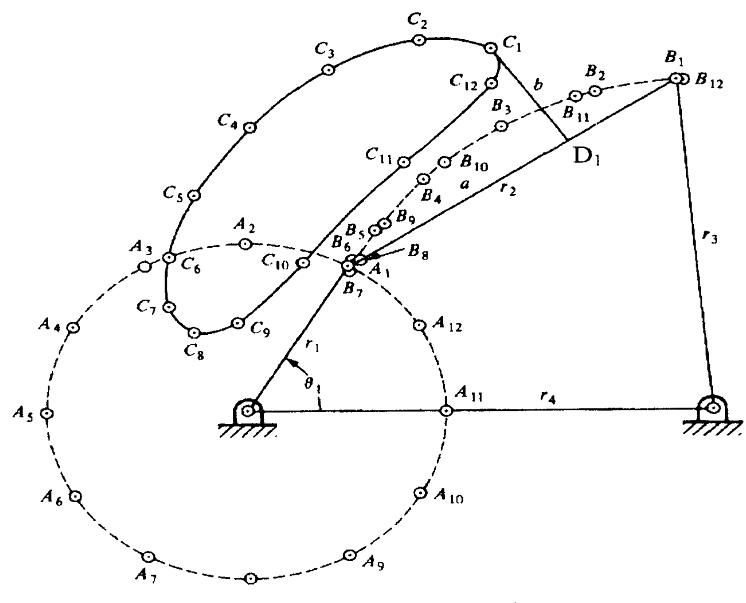


شكل 29-2

يبدأ الحل بتعيين النقطتين O_2 ، O_4 كما هو مبين في شكل 30-2 . ثم ترسم دائرة مركزها O_2 ونصف قطرها مساوي لطول الضلع O_2A ، وهذه الدائرة هي مسار النقطة A عندما يدور الضلع O_2A دورة كاملة. ويتم تعيين عدة نقط (A_1 إلى A_{12}) على هذه الدائرة تمثل مواضع النقطة A أثناء الحركة. ثم يرسم قوس دائري مركزه O_4 ونصف قطره مساوي لطول الضلع O_4B ، وهذا القوس هو مسار النقطة B عندما يدور الضلع O_2A دورة كاملة ، ويتم تعيين النقط (B_1 إلى B_{12}) على هذه القوس بحيث يكون:

$A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots = AB = 107$ mm.

ويتم تعيين النقطة C_1 كما هو مبين بالشكل عن طريق تعيين النقطة D_1 على الخط A_1B_1 ثم رسم الخط D_1C_1 عموديا على A_1B_1 و يتم تعيين النقط (C_2 إلى C_{12}) بتكرار هذه العملية .كما يمكن الاستعانة بورقة شفافة يرسم عليها الخطين AB، CD ثم توضع الشفافة على الرسم بحيث تنطبق نقطة A من الشفافة على نقطة A_1 على الدائرة ونقطة B من الشفافة على نقطة B_1 على القوس فتبين النقطة C على الشفافة موضع النقطة C_1 . ويتم تكرار العملية مع باقي النقاط.



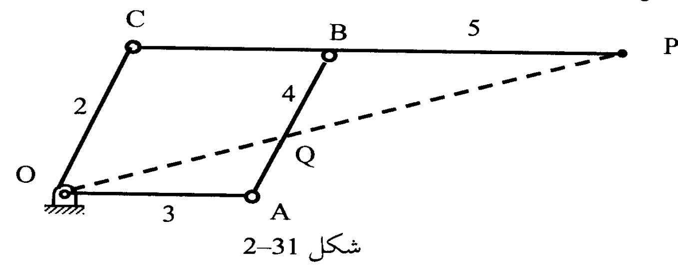
شكل 2–30

2.2 آليات الحركة المتوازية Parallel Mechanisms

هذا النوع هو حالة خاصة من الآليات فيها تتحرك الأضلاع موازية لنفسها. ومثال ذلك آلية البانتوجراف pantograph الموضحة في شكل 31–2 وهي تستعمل

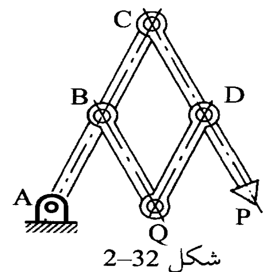
للتكبير أو التصغير وفيها تشكل الأضلاع 2,3,4,5 متوازي أضلاع بينما يمتد الضلع 5 حتى النقطة P التي عندها القلم . فإذا تحركت النقطة Q (تقاطع AB مع OP) على أي مسار فإن النقطة P ترسم صورة مكبرة لهذا المسار.

وتكون نسبة التكبير = طول OP÷ طول OQ.



شكل 31–2

ويبين شكل 32–2 تصميما آخر لآلية البانتوجراف وفية يتم تحريك قلم عند النقطة Q على الشكل المرسوم المراد تكبيره فيرسم قلم آخر عند النقطة P الشكل بضعف أبعاده.

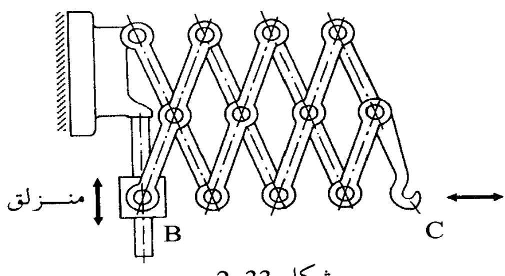


شكل 32–2

ويبين شكل 33–2 مثالا آخر لآليات الحركة المتوازية وهي آلية معروفة باسم مقص نورمبرج Nuremberg scissors [1] وهي تتكون من سلسلة من متوازيات الأضلاع وتستخدم لتحريك خطاف يحمل هاتفا أو مصباحا للقراءة في حركة أفقية عند النقطة C ، وتؤدي هذه الحركة إلى حركة المنـــزلق B إلى أعلى أو أسفل.

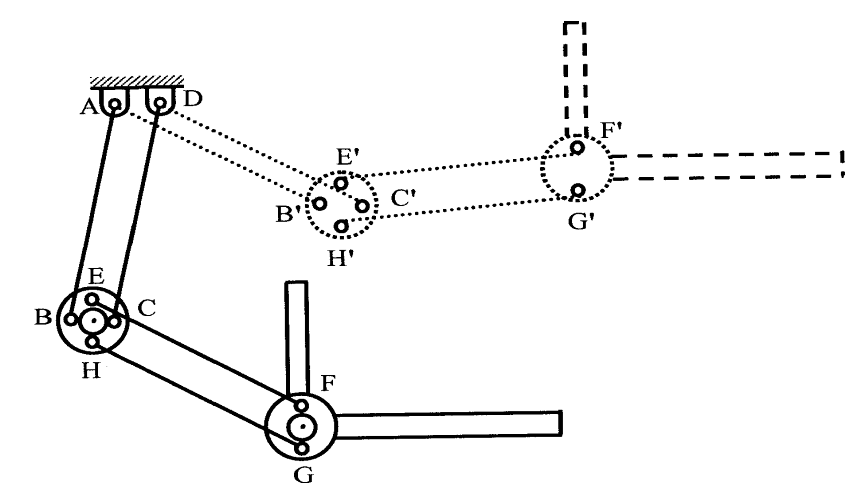
---

(١)انظر كتاب Jensen صفحة 416 .



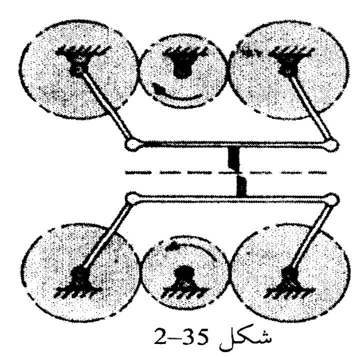
شكل 33-2

ويوضح شكل 34-2 آلية الرسم الهندسي وهي تتكون من متوازي أضلاع ABCDوكذلك متوازي أضلاع FGHE ويتم توصيلهما مع بعضهما عن طريق الحلقة EBHC. فإذا تحرك الذراع FG تتحرك معه المسطرتان الأفقية والرأسية إلى أي موضع على لوحـــة الرسم. ويلاحظ أن هذه الآلية لها درجتي حرية مستقلتين هما الحركة الأفقية (وتسمح بها الآلية الرباعية ABCD) والحركة الرأسية (وتسمح بها الآلية الرباعية FGHE).



شكل 34-2

ومن آليات الحركة المتوازية الأخرى يبين شكل 35–2 مثالا آخر[1] يتكون من آليتين رباعيتين من ذوات الحركة المتوازية مزودتين بحدين قاطعين ، وتتميز هذه الآلة بأنها توفر قوة قطع عالية وثابتة القيمة أثناء تنفيذ عملية قطع العينة على الطاير.



شكل 35–2

ويبين شكل 36(a)–2 آلية أخرى من آليات الحركة المتوازية وهي تتكون أساسا من آلية رباعية ABCQ (الأضلاع 2,3,4) على شكل متوازي أضلاع ومثبتة في القاعدة بالوصلتين A و Q ، وآلية رباعية مطابقة لها في الأبعاد هي AEFQ (الأضلاع 2,5,4). ويتصل الضلع المقوس 6 بكل من الضلع الرابط 3 على امتداده عند النقطة G ، وبالضلع الرابط 5 على امتداده عند النقطة H . وعند إدارة اليد يمينا ويسارا يدور الضلع المقوس 6 في حركة دائرية وبذلك تقوم ماسة مثبتة في هذا الضلع ببرادة حجر الجلخ لإعطائه حافة دائرية.

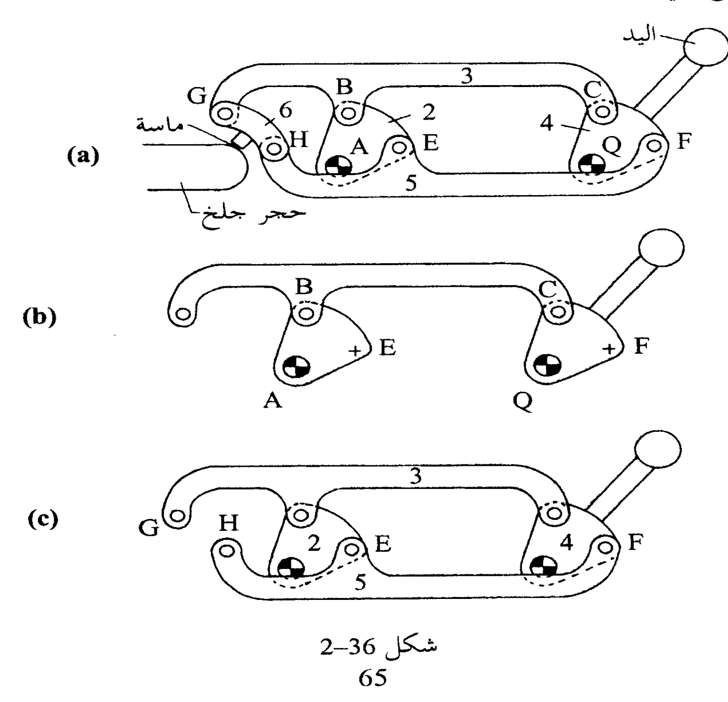
وعند حساب درجة الحرية m (mobility) لهذه الآلية باستعمال المعادلة (1–1) حيث عدد الأضلاع n هو 6 (لاحظ أن الضلع رقم 1 هو القاعدة وأن الوصلتين A و Q مثبتتان فيها) وعدد وصلات درجة الحرية الواحدة J_1 هو 8 فتكون $m = -1$. وهذه النتيجة غير صحيحة والسبب في ذلك يرجع إلى وجود ما يسمى مانعين زائدين (redundant constraints) كما بينا ذلك في الفصل الأول. ولتوضيح ذلك يبين شكل 36(b)–2 أن النقطتين E و F تدوران على دائرتين مركزيهما الوصلتين A وQ ، ولأن الطولين AE و QF متساويان تكون المسافة EF ثابتة أثناء الدوران وتساوي المسافة بين الوصلتين A و Q ، فإذا أضيف إلى الآلية الضلع الخامس 5 بحيث تكون

---

(1) انظر كتاب Chironis صفحة 12 .

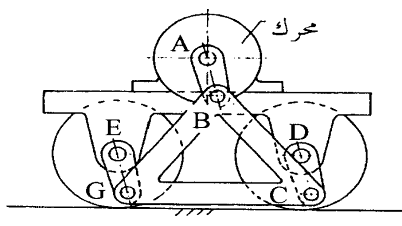
المسافة بين الوصلتين E و F ثابتة وتساوي المسافة بين الوصلتين A و Q فإن هذا الضلع الجديد يقيد حركة النقطتين E و F بحيث تتحركان على مسافة ثابتة وهذا يعتبر قيدا مكررا لأن المسافة EF ثابتة أثناء الدوران سواء أضيف الضلع 5 أو لم يضف.

أما القيد المكرر الثاني فينتج من إضافة الضلع 6 الذي يجبر النقطتين G و H على الاحتفاظ بمسافة ثابتة بينهما أثناء الحركة وهذا قيد مكرر لأن شكل 2-36(c) يبين أن هاتين النقطتين تكونان دائما على مسافة ثابتة من بعضهما لأن الضلع 5 هو صورة مرآة للضلع 3 (الأبعاد متساوية ولكن الاتجاهات معكوسة) والأبعاد AB و QF و AE و QC متساوية ولذلك تكون المسافة HG ثابتة أثناء الدوران سواء أضيف الضلع 6 أو لم يضف. وبذلك تكون درجة الحرية لهذه الآلية تساوي 1 ، أي أن تحريك اليد يؤدي إلى حركة محددة للآلية. وغني عن القول إنه إذا اختلفت أبعاد الأضلاع التي ذكرنا أنها متساوية فيما سبق فلن تتحرك الآلية.



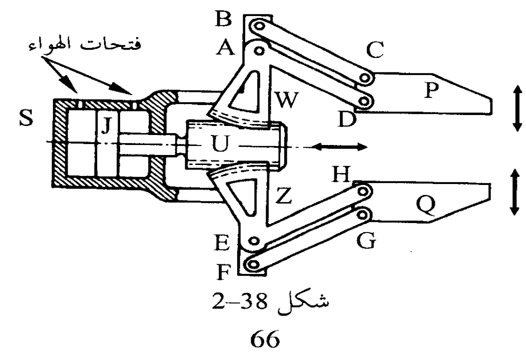
شكل 2-36

ويبين شكل 37–2 آلية أخرى من آليات الحركة المتوازية وهي تتكون من آليتين رباعيتين هما ABCD و ABGE ، كل منهما على شكل متوازي أضلاع ، وهي تستعمل في قاطرات السكك الحديدية لنقل الحركة من المحرك الكهربائي إلى العجلات الجارّة.



شكل 37–2

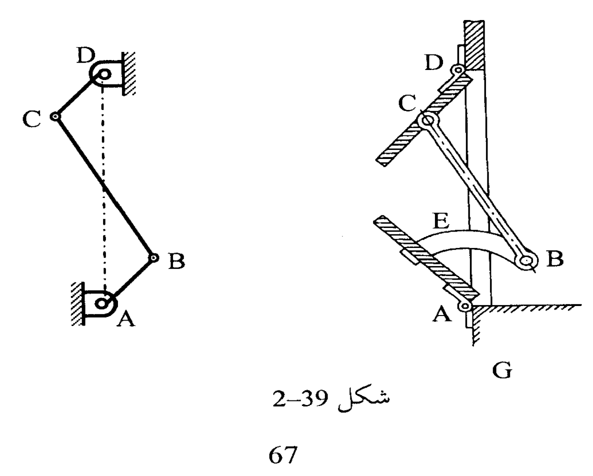
ويبين شكل 38–2 آلية تستعمل كيّد قابضة grip في الأذرع الآلية robotic arms وهي تتكون أساسا من آليتين رباعيّتين ABCD و EFGH كل منهما على شكل متوازي أضلاع بحيث تتحركان معا لإطباق الفكين P و Q على بعضهما أو لإبعادهـــما عن بعضهما ، ويتم تحريك هاتين الآليتين عن طريق المكبس J الذي يدفع معه الجزء المسطح U والذي يُركّب على كلٍ من جانبيه شريط مسنن rack متداخل مع أسنان جزء من ترس دائري عند W وجزءٍ آخر عند Z ، فتتسبب حركة المكبس يسارا في دوران الترس W مع عقرب الساعة (ومعه الذراع AD) ، وكذلك في دوران الترس Z عكس عقرب الساعة (ومعه الذراع EH) وبذلك ينطبق الفكان P و Q على بعضهما وتقبضان على الجسم المراد تحريكه ، بينما تؤدي حركة المكبس يمينا إلى تباعد الفكين وترك الجسم الموجود بينهما. ويتم تحريك المكبس يمينا أو يسارا عن طريق زيادة ضغط الهواء على أحد جانبي المكبس داخل الأسطوانة S عن جانب المكبس الآخر.



شكل 38–2

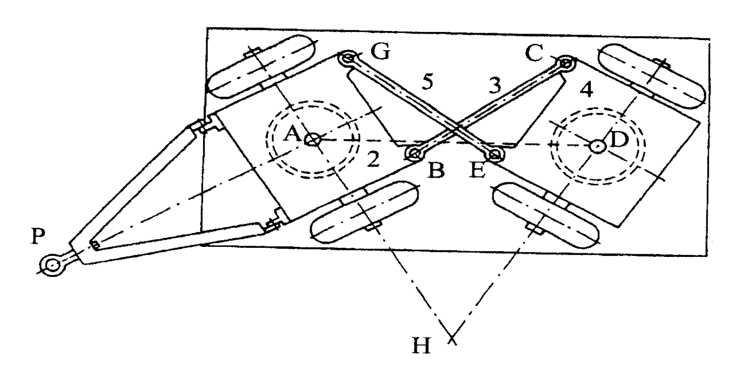
وعند حساب درجة الحرية m (mobility) لهذه الآلية باستعمال المعادلة (1-1) حيث عدد الأضلاع n هو 8 وعدد وصلات درجة الحرية الواحدة J_1 هو 11 فتكون m = -1 . وهذه النتيجة غير صحيحة والسبب في ذلك يرجع إلى وجود مانعين زائدين (redundant constraints) الأول بين الترس W والشريط المسنن ، والثاني بين الترس Z والشريط المسنن كما بينا ذلك في الفصل الأول. وبذلك تكون درجة الحرية لهذه الآلية تساوي 1 ، أي أن تحريك المكبس يؤدي إلى حركة محددة للآلية.

ويبين شكل 39-2 مثالا لنوعية أخرى من الآليات الرباعية تسمى الآليات "عكس المتوازية" anti-parallel حيث يوضح المخطط على يسار الشكل أن الضلعين AB و CD متساويان ومتوازيان ولكن الضلع CB يقطع خط المراكز AD ولا يوازيه كما هو الحال في الآلية المتوازية. ويوضح الرسم الأيمن في الشكل مسقطا رأسيا لأحد تطبيقات هذه الآلية حيث تستعمل لفتح أو غلق البابين بنفس القدر. ويلاحظ أنه لا يوجد ضلع جامد مباشرة بين النقطتين A و B ، ولكن الجزء المقوس الجامد E المثبت في الباب AG يحافظ على المسافة بين النقطتين A و B ثابتة مما يسمح بتحليل حركة الآلية اليمنى باستعمال مخطط تحليل الحركة kinematic diagram المبين على يسار الشكل وكأن هناك ضلعا جامدا بين النقطتين A و B .



شكل 39-2

وفي شكل 40–2 مثال آخر لآلية "عكس المتوازية" وهو يبين مسقطا من أسفل لعربة cart مستطيلة الشكل ذات أربعة عجلات ويتم جرّها عند النقطة P ، والعجلتان الأماميتان مثبتتان في حامل مربع 2 حر الدوران (في مستوى الرسم) حول النقطة A بالنسبة لجسم العربة ، وكذلك حامل العجلتين الخلفيتين 4 يدور حول النقطة B بالنسبة لجسم العربة . والحاملان متصلان ببعضهما بالقضيبين BC و EG عن طريق الوصلات الدورانية hinges عند B و C و E و G ، وبذلك يدوران معا. وميزة هذا التصميم أنه يسمح بدوران العربة حول دائرة صغيرة يصل نصف قطرها إلى الطول AH .



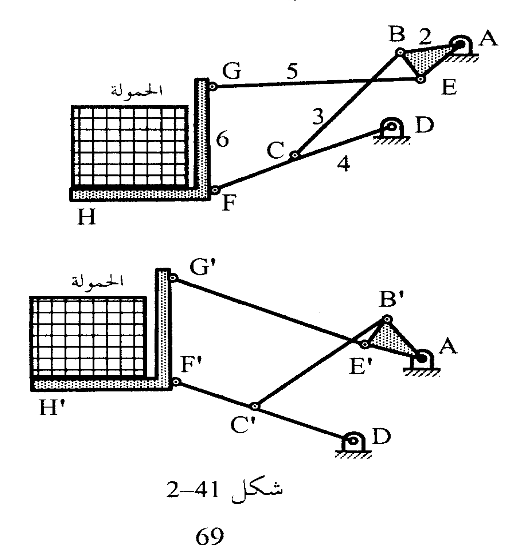
شكل 40–2

وعند حساب درجة الحرية m (mobility) لهذه الآلية باستعمال المعادلة (1–1) حيث عدد الأضلاع n هو 5 وعدد وصلات درجة الحرية الواحدة J_1 هو 6 فتكون m = 0 . وهذه النتيجة غير صحيحة والسبب في ذلك يرجع إلى وجود مانع زائد (redundant constraint) وذلك لأن الآلية ABCD هي آلية رباعية "عكس متوازية" تتحرك بحيث تكون المسافة EG ثابتة أثناء الدوران ، فإذا أضيف إلى الآلية الضلع الخامس 5 بحيث يكون طوله مساويا للمسافة بين الوصلتين E و G فإن هذا الضلع الجديد يقيد حركة النقطتين E و G بحيث تتحركان على مسافة ثابتة وهذا يعتبر قيدا مكررا لأن المسافة EG تكون ثابتة أثناء الدوران سواء أضيف الضلع 5

أو لم يضف. وبذلك تكون درجة الحرية لهذه الآلية تساوي 1 ، أي أن تحريك الذراع PA مع (أو عكس) اتجاه عقرب الساعة يؤدي إلى حركة محددة للآلية.

2.3 الآليات المركبة من الآلية الرباعية

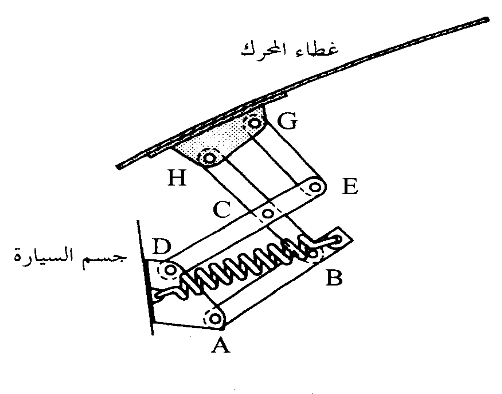
في كثير من الحالات تضاف إلى الآلية الرباعية أضلاع أخرى تعتمد في حركتها على حركة الآلية الرباعية وبذلك تتكون آلية مركبة ، ومثال ذلك ما يعرف بآلية الأضلاع الستة. ويبين شكل 41-2 واحدة من هذه الآليات وهي تستعمل لرفع الأحمال في الورش والمخازن وغيرها. وتتكون هذه الآلة من الآلية الرباعية ABCD مضافا إليها الضلعان 5 و 6 . ويبين الرسم الأعلى في الشكل الحمولة في الوضع الأسفل. لاحظ أن DCF ضلع واحد متماسك. وعندما يدور الضلع 2 إلى الوضع الجديد 'AB (المبين في الرسم الأسفل) تتبعه وصلات الآلية الرباعية إلى الوضع AB'C'D (لاحظ أن A و D مثبتتان في جسم المركبة الرافعة والتي تكون عادة مزودة بمحرك وعجلات بحيث تسمح لسائقها برفع الحمولة وتحريكها إلى أماكن أخرى في الورشة) ، ويتلازم مع هذه الحركة للآلية الرباعية انتقال الضلعين 5 و 6 إلى الوضعين 'E'G و 'G'F'H مما يؤدي إلى رفع الحمل كما هو مبين بالشكل.



شكل 41-2

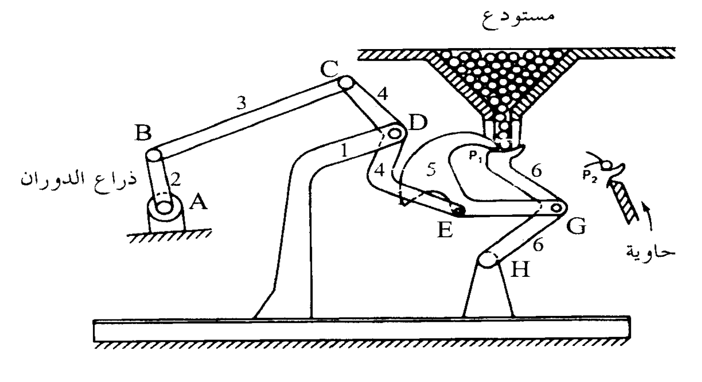
ويبين شكل 42–2 آلية أخرى من آليات الأضلاع الستة تستعمل لفتح وإغلاق غطاء المحرك في السيارات (الزنبرك spring ليس ضلعا جامدا ويهمل في تحليل الحركة). وهي تتكون من الآلية الرباعية ABCD المثبتة في جسم السيارة عند الوصلتين A و D ، مضافا إليها الضلعان EG و HG اللذان يمكن تحديد حركتهما بعد تحليل حركة الآلية الرباعية.

ويبين شكل 43–2 مثالا آخر لآليات الأضلاع الستة وهو تصميم مقترح[١] (الرسم تخطيطي وليس بمقياس رسم) لاستعماله في نقل قضبان أسطوانية ، واحداً بعد واحد ، من المستودع إلى الحاوية ومنها ينقل لإجراء عمليات تشغيل أخرى عليه. وهي تتكون من الآلية الرباعية ABCD المثبتة في القاعدة عند الوصلتين A و D ، مضافا إليها الضلعان 5 و 6 بحيث يقوم الضلع 6 بنقل قضيب واحد (على طرف الضلع والمصنوع على شكل كأس) من تحت المستودع إلى الحاوية ، بينما يأخذ الضلع 5 الشكل المبين بحيث تقوم حافة هذا الضلع (النقطة P_1) بضبط القضيب في وسط الكأس عند نزوله من المستودع ، ثم تقوم هذه الحافة (في الموضع P_2) بدفع القضيب من الكأس إلى الحاوية.



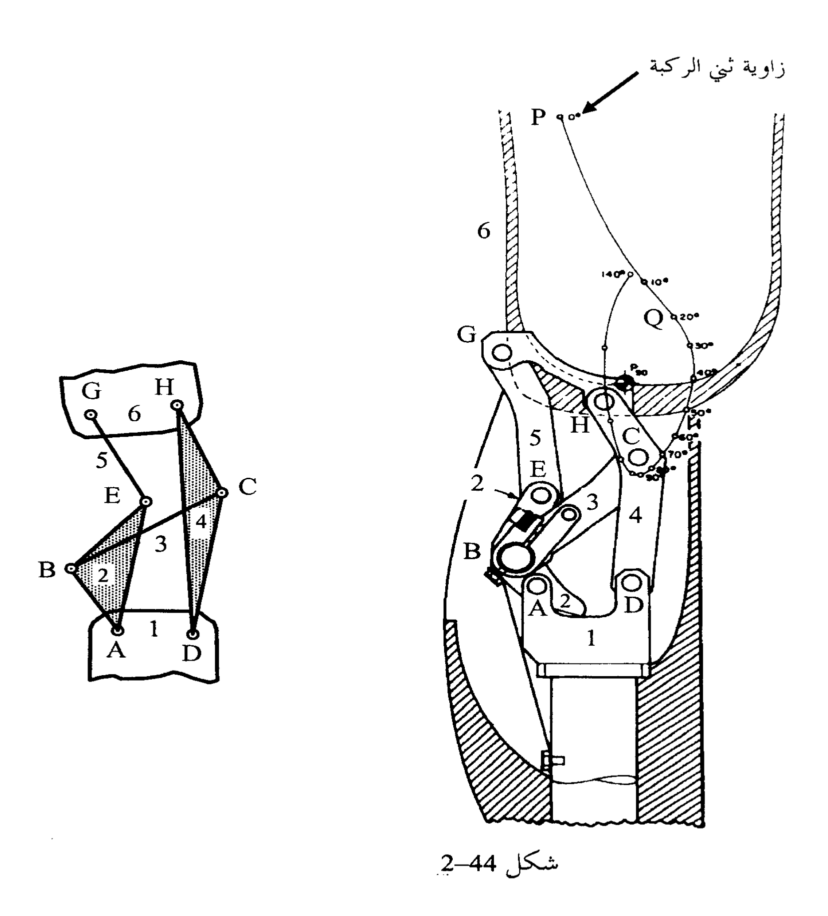
شكل 42–2

(١) انظر كتاب Erdman صفحة 19-17 .



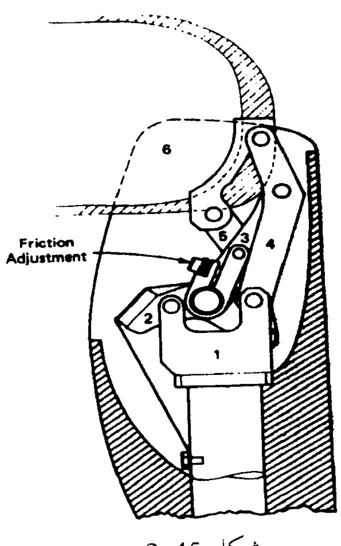
شكل 43–2

ويبين شكل 44–2 مثالا آخر لآليات الأضلاع الستة وهو من تصميم جامعة كاليفورنيا ويستعمل كَرُكبة صناعية لتوصيل الفخذ (الضلع 6) بالساق الصناعية (الضلع 1). وهذا التصميم يتكون من الآلية الرباعية ABCD المثبتة في الساق الصناعية عند الوصلتين A وD ، مضافا إليها الضلعان 5 و 6 كما هو موضح في مخطط تحليل الحركة للآلية kinematic diagram المرسوم في الجزء الأيسر من الشكل. ولتمكين مستخدمي هذه الآلية من المشي المتزن فإنها تقوم بمحاكاة مواضع نقط الدوران النسبي بين الفخذ والساق في الإنسان السوي (نقط الدوران النسبي تسمى أيضا مراكز السرعة اللحظية وهي موضوع الفصل السابع من هذا الكتاب) ، ومكان هذه النقط يتغير مع تغير الزاوية بين الفخذ والساق. فمثلا النقطة P المبينة في الشكل الأيمن هي نقطة الدوران النسبي عندما تكون زاوية الدوران تساوي صفرا (أي أن الفخذ على استقامة الساق كما في الشكل) ، بينما النقطة Q هي نقطة الدوران النسبي عندما يدور الساق 20^{o} بالنسبة إلى الفخذ.



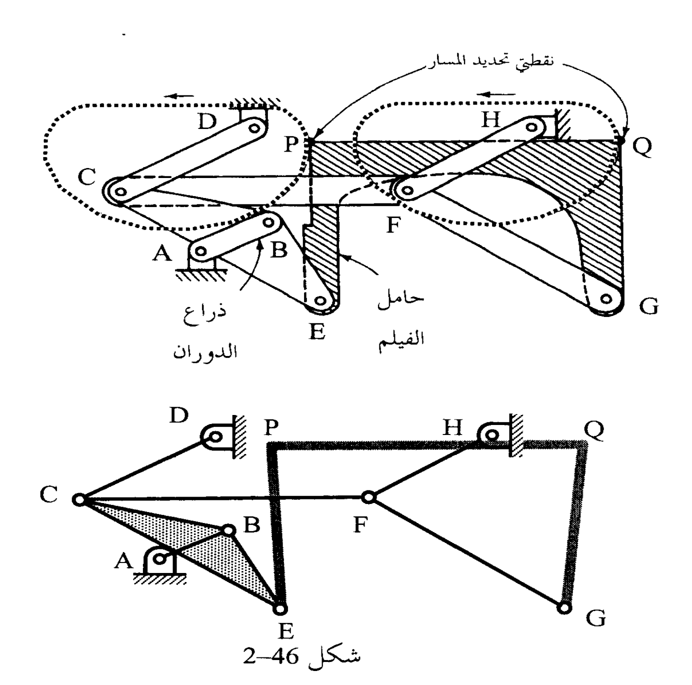
شكل 44–2

ويبين شكل 45–2 وضع الأضلاع في الآلية عندما يدور الفخذ 90° بالنسبة إلى الساق.



شكل 45–2

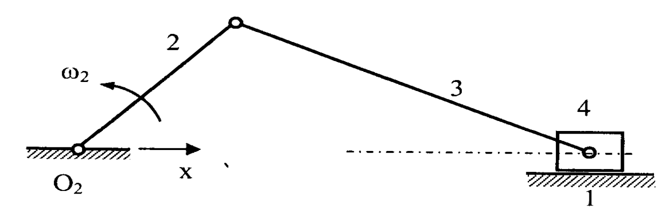
ويبين شكل 46–2 مثالا آخر للآليات المركبة من الآلية الرباعية وهي آلة تستعمل في صناعة أفلام الأشعة السينية حيث المطلوب أن تقوم المنصة حاملة الفيلم (EPQG) باستقبال الفيلم من آلة إنتاج الفيلم الخام (غير مبينة بالشكل) عند مستوى منخفض ثم رفع الفيلم الخام رأسيا بدون دوران يذكر للمنصة حتى لا ينـــزلق الفيلم على المنصة ويصيبه التلف، ثم تحريك الفيلم أفقيا لمعالجته كيميائيا ، وأخيرا نقله إلى سير متحرك belt conveyor (غير مبين). وتتكون الآلة المبينة في الشكل (مخطط تحليل الحركة للآلية kinematic diagram موضح في المخطط الأسفل) من ثلاث آليات بسيطة أولها الآلية الرباعية ABCD وهي تستعمل لتحريك الآليتين الرباعيتين DCFH و ECFG (وكل منهما على شكل متوازي أضلاع). ونتيجة لدوران الذراع AB يكون مسار النقطتين P و Q (اللتين تحددان مسار سطح المنصة) كما هو مبين في الشكل بالمنحنيين المنقطين DCFH و ECFG وبذلك يؤدي هذا التصميم المهمة المطلوبة.



شكل 46–2

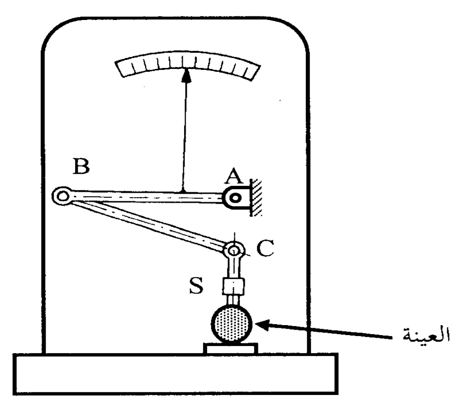
2.4 آلية المنـزلق [المكبس] وعمود الإدارة Slider-crank

هذه الآلية تستعمل في آلات البنـــزين والديزل حيث يضغط الغاز في الأسطوانة على المكبس 4 وتنتقل الحركة عن طريق ذراع التوصيل 3 connecting rod إلى عمود الإدارة عن طريق الضلع الدوار 2 crank (انظر شكل 47–2). وهناك أربعة تصنيفات inversions من هذه الآلية تمت مناقشتها في الفصل الأول.



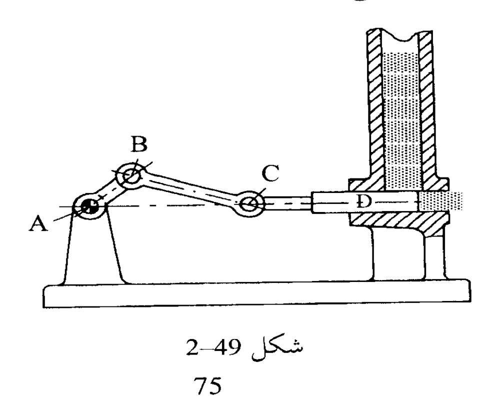
شكل 47–2

ويبين شكل 48-2 مثالا لاستعمال آلية المنـــزلق في قياس الأبعاد الخارجية للأجسام حيث يعتمد بُعد المنـــزلق S من مركز الدوران الثابت A على ارتفاع العينة وبذلك تتغير زاوية الذراع AB حسبَ مقاس العينة فيدور المؤشر على تدريج معاير لبيان مقاس العينة مباشرة.



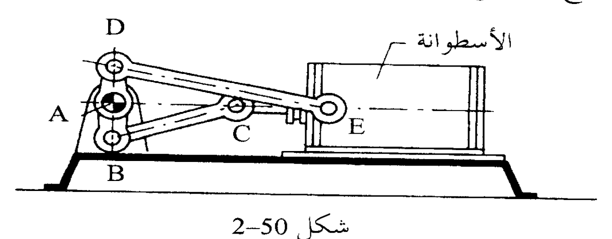
شكل 48-2

ويبين شكل 49-2 مثالا آخر لاستعمال آلية المنـــزلق في مناولة الصناديق المخزونة فوق بعضها في حاوية رأسية حيث يدفع المنـــزلق D أحد الصناديق إلى الخارج وفي نفس الوقت يمنع نزول صناديق أخرى من الحاوية.



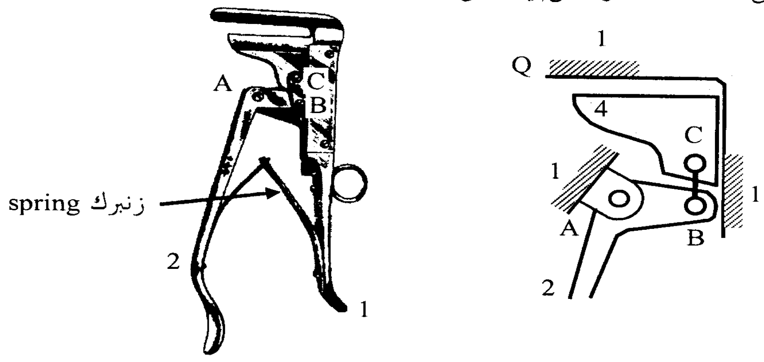
شكل 49-2

أما شكل 50-2 فيبين تصميما معدلا لآلية المنـــزلق حيث يقوم ذراع الدوران DAB بتحريك المكبس داخل الأسطوانة عند دورانه عكس عقرب الساعة من الوضع المبين عن طريق ذراع التوصيل BC ، وفي نفس الوقت يقوم بجذب الأسطوانة عن طريق ذراع التوصيل DE .



شكل 50-2

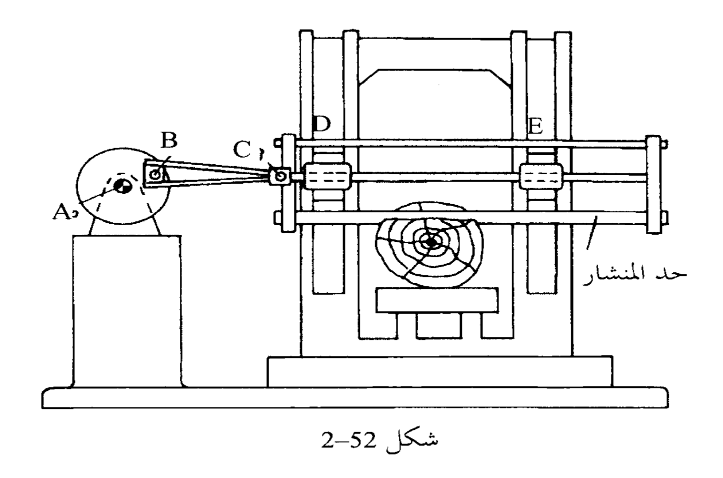
ويبين شكل 51-2 مثالا آخر لاستعمال آلية المنـــزلق وهو آلة جراحية تستعمل لقص الأنسجة ، ويوضح مخطط تحليل الحركة للآلية kinematic diagram على يمين الشكل أن الضغط على اليد 2 يؤدي إلى انزلاق الفك 4 عن طريق ذراع التوصيل BC ليقوم مع الفك 1 بعملية القص shear (الزنبرك spring بين اليدين 1 و 2 ليس ضلعا جامدا ويهمل في تحليل الحركة).



شكل 51-2

ويبين شكل 52-2 مثالا آخر لاستعمال آلية المنـــزلق تستخدم في عملية قطع الخشب حيث يقوم ذراع الدوران AB بتحريك المنشار يمينا ويسارا عن طريق ذراع

التوصيل BC ، ومع تقدم عملية قطع الخشب ينــزل المنشار إلى أسفل تحت تأثير وزنه وكذلك وزن المنــزلقين D و E .

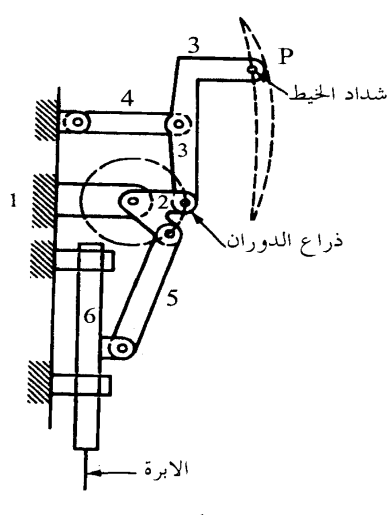


شكل 52–2

ويبين شكل 53–2 جزءاً من آلة الحياكة (الخياطة) sewing machine وهي تتكون من آليتين مستقلتين تدوران بدوران ذراع واحد (الضلع 2) ، الأولى آلية المنــزلق (الأضلاع 1,2,5,6 ، وفيها الضلع 5 هو ذراع التوصيل والمنــزلق هو الضلع 6) وتستخدم لتحريك الإبرة إلى أعلى وأسفل ، والثانية هي الآلية الرباعية (الأضلاع 1,2,3,4) التي تستخدم لجذب الخيط المستعمل في الحياكة عند الفتحة P على امتداد الضلع الرابط 3 .

ويبين شكل 54–2 آلة احتراق داخلي ذات مشوار (شوط stroke) متغير حيث يبين شكل (a)54–2 وضع المكبس في مركز السكون الأعلى (top dead center) بينما يبين شكل (b)54–2 وضع المكبس في مركز السكون الأسفل (bottom dead center). وتتكون الآلة من الآلية الرباعية ABCD (انظر مخطط تحليل الحركة للآلية kinematic diagram في شكل (c)54–2) والتي تقوم بتحريك المنــزلق Q داخل الأسطوانة عن طريق ذراع التوصيل HQ. وتعتبر النقطة D مثبتة في القاعدة وذلك عن

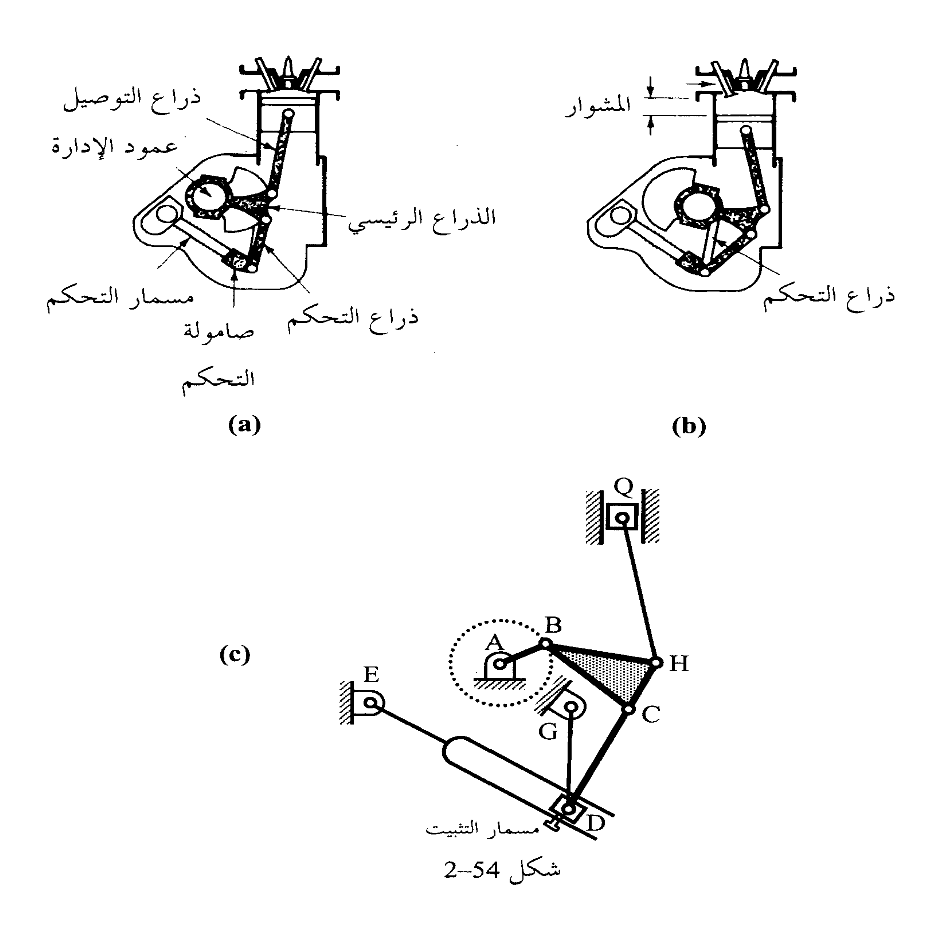
طريق ربط مسمار التثبيت بحيث لا يتغير الطول ED أثناء حركة الآلة وبالتالي فإن الضلعين ED و GD يضمنان ثبات الوصلة D في الوضع المبين.



شكل 53–2

وميزة استعمال آلية رباعية في هذا التصميم لتحريك ذراع التوصيل HQ والمكبس هو أن المشوار يمكن تغييره عن طريق فك مسمار التثبيت عند النقطة D وتغيير الطول ED ثم إعادة ربط المسمار. وسنترك للقارئ إثبات أن تقصير الطول ED ينتج عنه زيادة في طول مشوار المكبس داخل الأسطوانة. وترجع فائدة تغيير المشوار في قدرة المستخدم على التحكم في نسبة ضغط الوقود داخل الأسطوانة حيث إنه من المعلوم أن كفاءة الآلة تزيد مع زيادة نسبة الضغط ، ولكن البنـــزين الذي له رقم أوكتين منخفض لا يصح استعماله مع نسبة ضغط عالية ، ولذا فإن هذا التصميم يسمح باختيار أفضل مشوار يتناسب مع ظروف التشغيل.

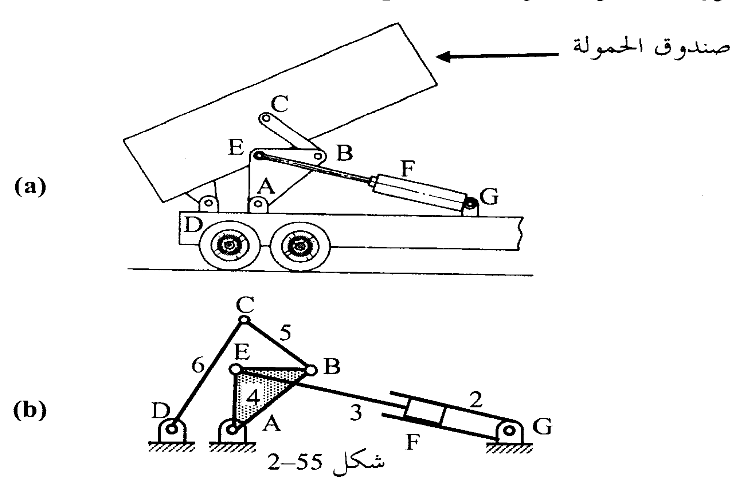
ويبين شكل 55(a)–2 مثالا لآلة أخرى مركبة من الآلية الرباعية ومنـــزلق ، وهي هنا حالة الشاحنة القلاب dump truck (تسمى في منطقة الخليج النساف) ،



شكل 54–2

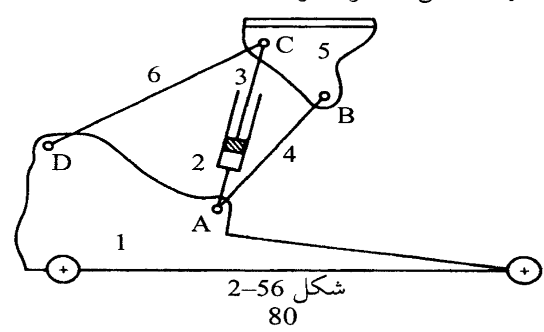
ولكن هنا يقوم المنـــزلق بتحريك الآلية الرباعية حيث تؤدي حركة المكبس F إلى داخل الأسطوانة 2 (انظر مخطط تحليل الحركة للآلية kinematic diagram الموضح في شكل (b)55–2) إلى جذب النقطة E ناحية الوصلة G وبالتالي دوران الضلع 4 (مع اتجاه عقرب الساعة) في الآلية الرباعية التي تدور أضلاعها الأخرى 5 و 6 بالتالي لإرجاع صندوق الحمولة إلى وضعه الأفقي. ويلاحظ أن حركة المكبس داخل

الأسطوانة تؤدي (بالإضافة إلى إدارة الآلية الرباعية) إلى تغيير طول المسافة EG وبالتالي إلى دوران الأسطوانة – وداخلها المكبس – حول الوصلة G .



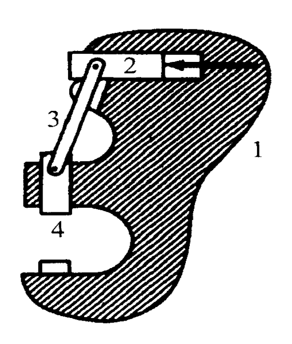
شكل 55-2

ويبين شكل 56-2 مثالا آخر لآلة مركبة من الآلية الرباعية ومنـــزلق ، وهي هنا حالة رافعة hydraulic jack ، وفيها أيضا يقوم المنـــزلق بتحريك الآلية الرباعية ABCD حيث تؤدي حركة المكبس 3 داخل الأسطوانة 2 (إلى أعلى) إلى دفع الوصلة C بعيدا عن الوصلة A وبالتالي دوران الآلية الرباعية ABCD فيرتفع الحامل 5 ومعه الحمولة المراد رفعها. ويلاحظ أن حركة المكبس داخل الأسطوانة تؤدي (بالإضافة إلى إدارة الآلية الرباعية) إلى تغيير طول المسافة AC وبالتالي إلى دوران الأسطوانة – وداخلها المكبس – حول الوصلة A .



شكل 56-2

ويبين شكل 57–2 مثالا آخر للآليات المعتمدة على المنـــزلقات وهو آلة كبس حيث تؤدي حركة المنـــزلق 2 إلى دفع ذراع التوصيل 3 والذي بدوره يدفع المنـــزلق 4 بقوة كبيرة تستعمل لإجراء عملية الكبس المطلوبة.

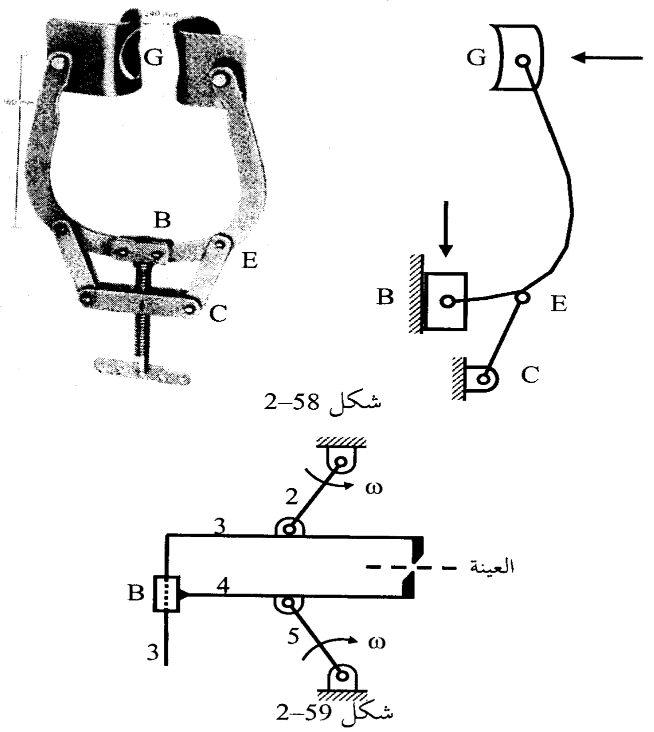


شكل 57–2

ويبين شكل 58–2 آلة تستعمل أثناء العمليات الجراحية للقبض على الأنسجة في جسم المريض عند الفكين G وكما يوضح مخطط تحليل الحركة للآلية kinematic diagram المرسوم على يمين الشكل فإن إدارة العمود المسنن بحيث تؤدي إلى حركة المنـــزلق B إلى أسفل ينتج عنه دوران الذراع المقوس BEG عكس عقرب الساعة حول الوصلة E فيتحرك الفك G إلى اليسار ليقبض على الأنسجة. ويمكن عند التمعن في الشكل إدراك أن هذه الآلية هي في حقيقتها آلية المنـــزلق العادية حيث CE هو ذراع الدوران و BE هو ذراع التوصيل و B هو المنـــزلق ، ويضاف إلى هذه الآلية الأساسية الفك G على امتداد ذراع التوصيل.

ويبين شكل 59–2 آلة تستعمل لقطع العينات المتصلة كالقضبان والمواسير والأسلاك أثناء الحركة "على الطاير" on the fly مما يزيد الإنتاج بسبب عدم الحاجة إلى وقف العينات لقطعها. وتتكون الآلة من ذراعي دوران 2 و 5 يدوران بنفس السرعة ω فيتحرك الضلعان المتوازيان 3 و 4 أفقيا وتضيق المسافة بينهما مع الحركة حتى ينطبق حدا القطع المتقابلان والمثبتان فيهما ويقومان بعملية القطع ، ويسمح المنـــزلق B والمثبت في الضلع 4 للجزء الرأسي للضلع 3 بالانزلاق فيه رأسيا حتى

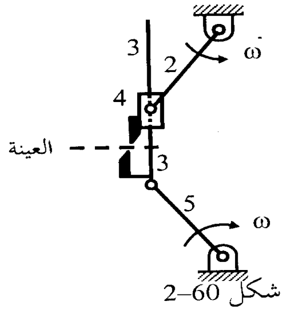
يمكن أن يتحرك الضلعان المتوازيان 3 و 4 أفقيا وتضيق المسافة بينهما مع الحركة . ويتم ضبط سرعة ذراعي الدوران ω كي تتساوى السرعة الأفقية للحدين القاطعين مع سرعة العينة. وفي هذا التصميم يكون حدا القطع في وضع رأسي طول الوقت.



شكل 2-58

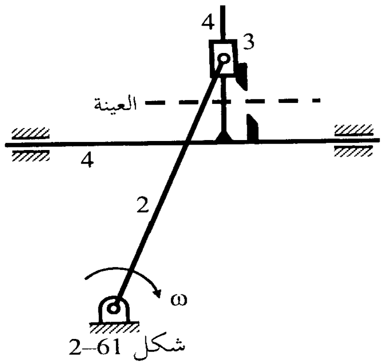
شكل 2-59

ويبين شكل 60-2 تصميما آخر لآلة قطع العينات المتصلة أثناء الحركة "على الطاير". وتتكون الآلة من ذراعي دوران 2 و 5 يدوران بنفس السرعة ω فيتحرك الضلع 3 داخل المنـــزلق 4 رأسيا حتى ينطبق حدا القطع المتقابلان والمثبتان فيهما ويقومان بعملية القطع. ويتم ضبط سرعة ذراعي الدوران ω كي تتساوى السرعة الأفقية للحدين القاطعين مع سرعة العينة. وفي هذا التصميم — كما في التصميم السابق – يكون حدا القطع في وضع رأسي طول الوقت.



شكل 2–60

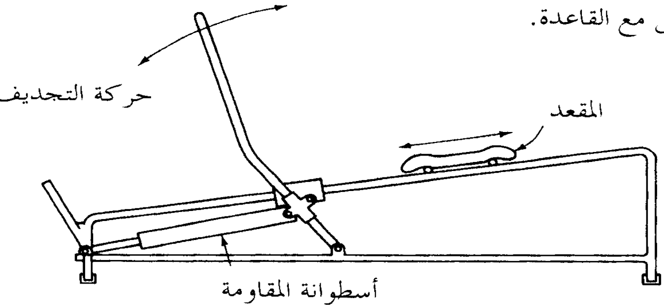
ويبين شكل 2–61 تصميما ثالثا لآلة قطع العينات المتصلة أثناء الحركة "على الطاير". فعندما يدور ذراع الدوران 2 يتحرك المنـــزلق 3 رأسيا على الضلع 4 الذي ينـــزلق بدوره أفقيا حتى ينطبق حدا القطع المتقابلان والمثبتان فيهما ويقومان بعملية القطع. ويتم ضبط سرعة ذراع الدوران ω كي تتساوى السرعة الأفقية للحدين القاطعين مع سرعة العينة. وفي هذا التصميم – كما في التصميمين السابقين – يكون حدا القطع في وضع رأسي طول الوقت.

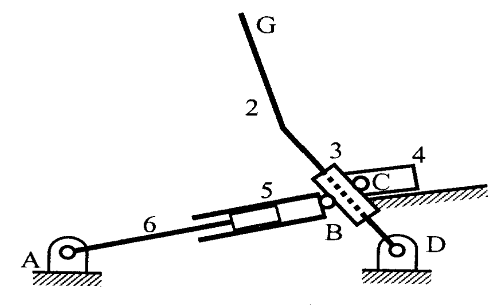


شكل 2–61

ويبين شكل 2–62 آلة تدريب رياضية تعتمد على المنـــزلقات في تصميمها ، وكما يوضح مخطط تحليل الحركة للآلية kinematic diagram المرسوم أسفل الشكل فعندما يحرك المتدرب ذراع الدوران 2 يتحرك المنـــزلق 3 على هذا الذراع بحيث يتحرك المنـــزلق 4 على القاعدة وفي نفس الوقت يتحرك المكبس 6 داخل الأسطوانة 5 (ويمكن ضبط المقاومة داخل الأسطوانة إلى المستوى الملائم للمتدرب) ،

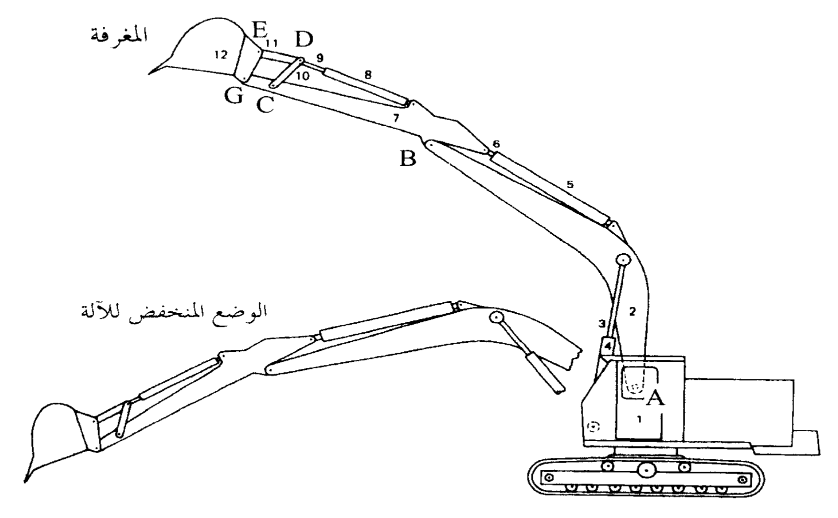
ونتيجة لهذا تتغير المسافة بين الوصلتين A و B وفي نفس الوقت تتغير زاوية الأسطوانة والمكبس مع القاعدة.





شكل 2–62

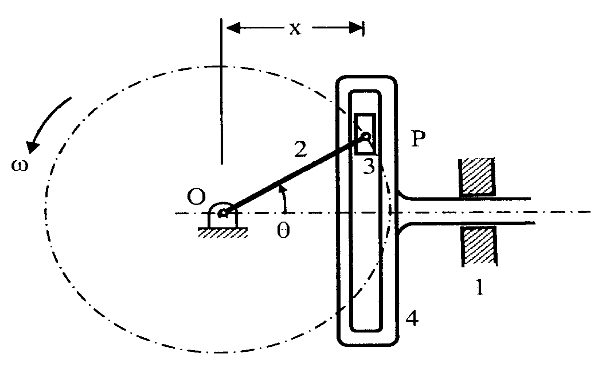
ومن التطبيقات المهمة التي تعتمد إلى حد كبير على المنـــزلقات في تصميمها الأذرع الآلية robotic arms والتي يبين شكل 2–63 أحدها وهي آلة حفر ذات ثلاث درجات حرية ، أولها حركة المنـــزلق 3 داخل الأسطوانة 4 والتي ينتج عنها دوران الضلع 2 (ومعه كل الأضلاع التي فوقه) حول محور الدوران A المثبت في جسم المركبة – كما يظهر في الوضع المنخفض للآلة – ، وثانيها حركة المنـــزلق 6 داخل الأسطوانة 5 والتي ينتج عنها دوران الضلع 7 (ومعه كل الأضلاع التي فوقه) حول محور الدوران B المثبت في الضلع 2 ، وثالثهما حركة المنـــزلق 9 داخل الأسطوانة 8 والتي ينتج عنها دوران الآلية الرباعية CDEG التي تتحكم في دوران المغرفة 12 .



شكل 63-2

2.5 آليات الحركة التوافقية [مثال لها آلية Scotch Yoke]

يوضح شكل 64-2 تركيب هذه الآلية حيث يدور الذراع 2 بسرعة منتظمة فتنـــزلق النقطة P في مجرى في الجزء 4 الذي يتحرك حركة أفقية ترددية.



شكل 64-2

وتتم الحركة بحيث تكون النقطة P على مسافة أفقيه x من نقطة O حيث:

$$x = R \cos \theta = R \cos \omega t \tag{2-4}$$

وحيث R هو طول الضلع OP ، ω هي سرعة دوران الذراع OP ووحداتها rad/s والزاوية θ هي θ = ωt. وتكون V هي سرعة النقطة P وكذلك A هي عجلة النقطة P :

$$V = dx/dt = -R \omega \sin \omega t \tag{2-5}$$

$$A = dV/dt = -R\omega^2 \cos \omega t \tag{2-6}$$

$$A = -\omega^2 x \tag{2-7}$$

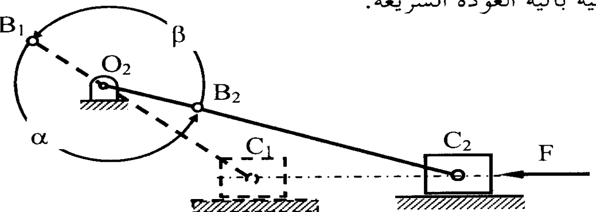
والمعادلة (2-7) هي تعريف الحركة التوافقية البسيطة simple harmonic motion ، أي أن الضلع 4 يتحرك يمينا ويسارا بحركة توافقية بسيطة فيها تتناسب العجلة A طرديا مع الإزاحة x .

2.6 آليات العودة السريعة Quick Return Mechanisms

في كثير من التطبيقات العملية تستعمل الآليات لتنفيذ بعض المهام بصورة متكررة ومثال ذلك دفع القطع في خط الإنتاج أو ضغط الأجزاء مع بعضها لتنفيذ عمليات اللحام أو ثني الألواح. ومن المرغوب فيه في مثل هذه الحالات استعمال محرك ثابت السرعة ولكن مع الأخذ في الاعتبار أن الآلية تكون تحت أحمال التشغيل في جزء من دورة عملها (ويسمى هذا الجزء من الدورة شـــوط التشغيل work stroke) بينما تكون الآلية في الجزء الباقي من الدورة في حالة عودة لبدء الدورة من جديد ولا تؤدى أي شغل ويسمى هذا الجزء من الدورة شوط العودة return stroke. ومثال ذلك آلية المكبس المنحرف offset slider-crank الموضحة في شكل 2-65 والتي يدور فيها ذراع الدوران O_2B_1 عكس عقرب الساعة.

ففي شوط التشغيل (حركة المكبس من C_1 إلى C_2) يلزم التغلب على حمل التشغيل F بينما لا يوجد تحميل عند عودة المكبس من C_2 إلى C_1 . وفي مثل هذه الحالات ولتقليل الزمن الضائع في العودة (وفيه لا يتم عمل أي شغل مفيد) ولتقليل القدرة المطلوبة من المحرك فإنه من المفيد تصميم الآلية بحيث يكون زمن شوط العودة أصغر من زمن شوط التشغيل. وتكون النسبة T هي نسبة زمن التشغيل ÷ زمن

العودة. ومن المفيد إذن أن تكون النسبة T أعلى من 1 ، فإذا تحقق ذلك سميت مثل تلك الآلية بآلية العودة السريعة.



شكل 65–2

ويلاحظ من شكل 65–2 أن العمود الدوار crank ينتقل من الموضع O_2B_1 إلى الموضع O_2B_2 (خلال الزاوية α) في أثناء انتقال المكبس من C_1 إلى C_2 (شوط التشغيل) ، بينما ينتقل من الموضع O_2B_2 إلى الموضع O_2B_1 (خلال الزاوية β) في أثناء انتقال المكبس من C_2 إلى C_1 (شوط العودة) . فإذا كانت سرعة المحرك ثابتة ، يكون (زمن دوران العمود زاوية مقدارها α) ÷ (زمن دورانه زاوية مقدارها β) هو نفسه نسبة الزاوية α ÷ الزاوية β أي:

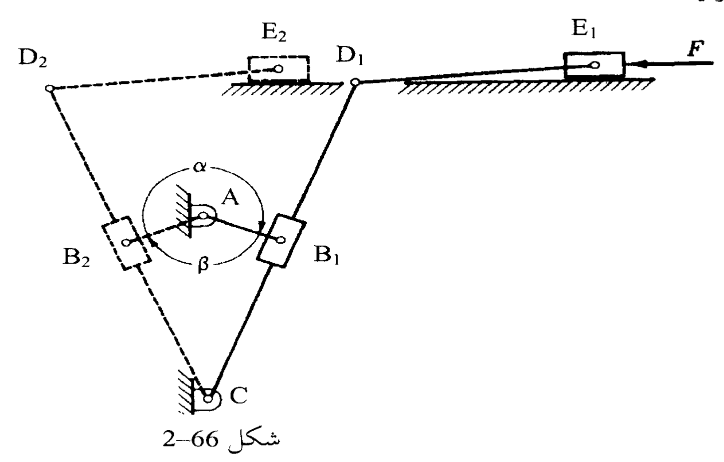
$$T = \alpha / \beta \qquad (2\text{–}8)$$

ويلاحظ من هذه المعادلة أن نسبة الزمن T لا تعتمد على القوى المؤثرة ولا مقدار الشغل المبذول ولا حتى على سرعة الدوران و إنما تعتمد فقط على الأبعاد الهندسية للآلية . ولكن يلاحظ أيضا أن هناك تغيرًا لنسبة الزمن مع اتجاه الدوران فإذا عكسنا اتجاه الدوران ينتج عن ذلك انعكاس نسبة الزمن.

وكما هو واضح من الشكل فإنه لإيجاد نسبة الزمن T يلزم تحديد مراكز السكون والنقط C_1, C_2 و B_1 و B_2 وهذه بدورها تتحدد من ملاحظة أن O_2B_2 يكون على امتداد B_2C_2 ، ومن ملاحظة أن O_2B_1 ينطبق على B_1C_1 .

وهناك أنواع كثيرة من آليات العودة السريعة. وشكل 66–2 يوضح آلية أخرى تسمى آلية المكشطة Crank-shaper mechanism . وفي هذه الحالة تنطبق المعادلة (8–2) ويتم إيجاد نقط السكون B_1 , B_2 من ملاحظة أن AB_1 عمودي على CD_1 ،

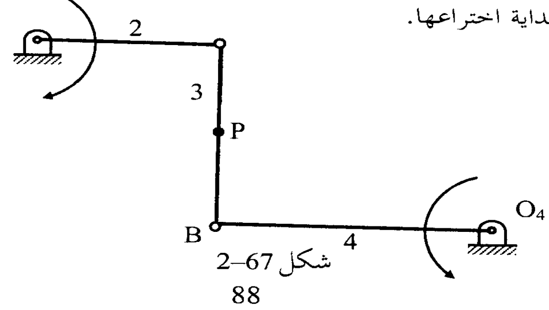
وأن AB_2 عمودي على CD_2 . ويكون الشوط stroke هو المسافة E_1E_2 وهي تساوي أيضا المسافة D_1D_2.



شكل 66–2

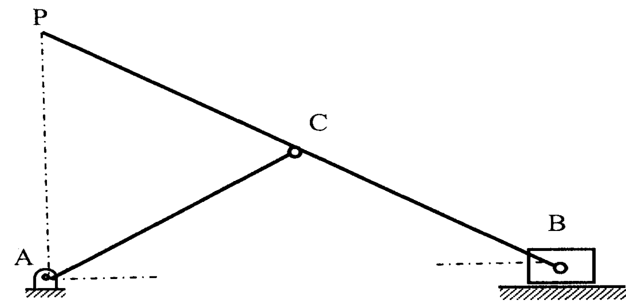
2.7 آليات الخط المستقيم Straight-Line mechanisms

في نهاية القرن السابع عشر وقبل اختراع آلية الفريزة milling machine كان من الصعوبة قطع الأجزاء المستوية المستقيمة فكان من الأهمية بمكان أن يتم الحصول على حركة مستقيمة باستعمال آليات تتكون من قضبان بحيث تتحرك إحدى النقط على الضلع الرابط حركة شبه مستقيمة. وربما كان أشهر هذه الآليات هي آلية واط Watt's mechanism والموضحة في شكل 67–2 حيث تتحرك النقطة P في جزء من حركتها على خط شبه مستقيم. وقد استخدمت هذه الآلية في مكبس الآلات البخارية في بداية اختراعها.



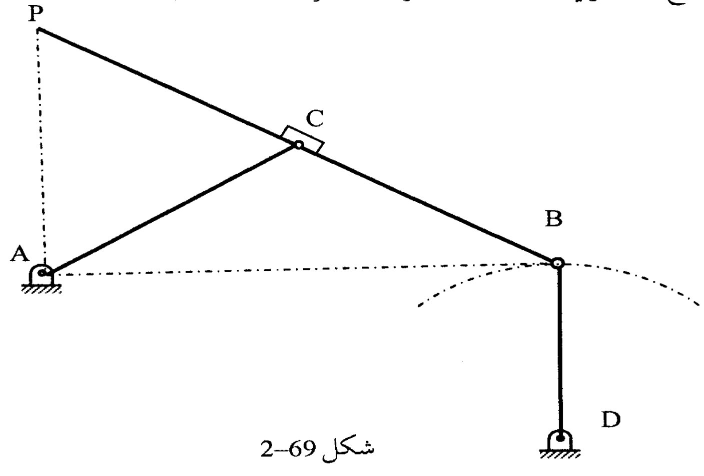
شكل 67–2

ويوضح شكل 68-2 آلية أخرى هي آلية سكوت Scott mechanism التي تعطي حركة مستقيمة للنقطة P على شرط أن يكون AC = BC = CP.



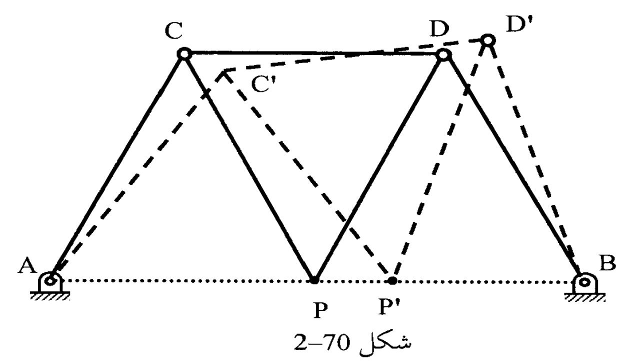
شكل 68-2

ويوضح شكل 69-2 شكلا آخر من أشكال هذه الآلية حيث استبدل المنـــزلق بالضلع BD وفي هذه الحالة تتحرك P حركة شبه مستقيمة



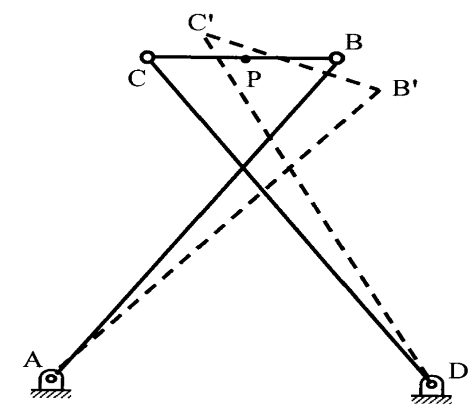
شكل 69-2

أما شكل 70-2 فيوضح آلية أخرى هي آلية روبرت Robert's mechanism حيث تتحرك P على خط مستقيم إذا كان AC = CP = PD = DB وكـــان CD = ½ AB .



شكل 70–2

ويوضح شكل 71–2 آلية أخرى (Chebychev mechanism) حيث تسير النقطة P (الواقعة في منتصف BC) على خط شبه مستقيم إذا كان AD = 2BC على شرط أن يكون AB = CD = 1.25AD .



شكل 71–2

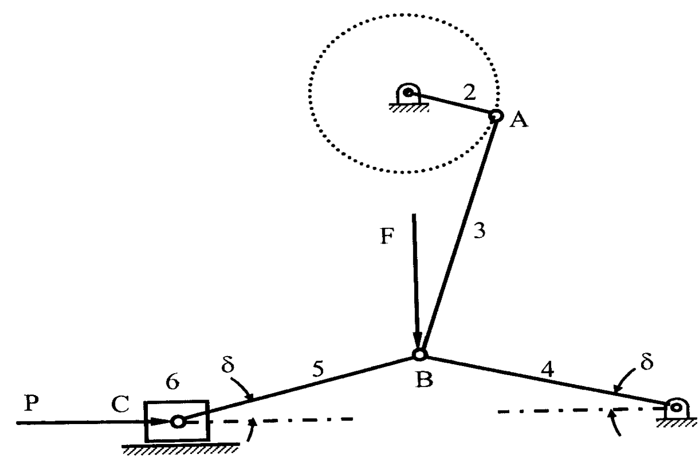
2.8 آليات الكبس Toggle Mechanisms

تستعمل هذه الآليات إذا كانت هناك حاجة لاستعمال قوة صغيرة لتحريك حمل كبير مسافة قصيرة ومثال ذلك الآلية الموضحة في شكل 72–2 حيث يكون طول

الضلع 4 مساويا لطول الضلع 5. فتكون العلاقة:

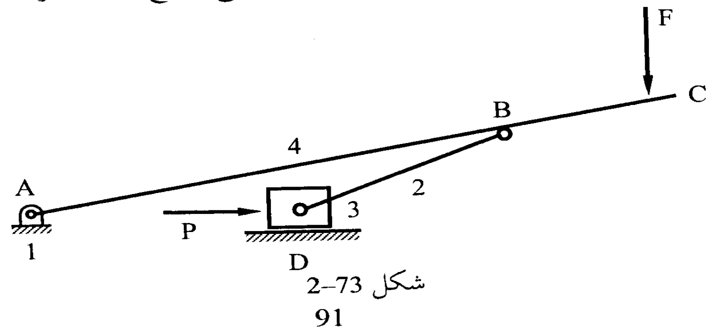
$$F= P\ (2 \tan \delta\ ) \qquad (2-9)$$

حيث F هي القوة المستعملة للتغلب على المقاومة الكبيرة P. ومن المعادلة يتضح أنه عندما تكون الزاوية δ صغيرة جدا فإن قيمة صغيرة للقوة F تتغلب على قيمة كبيرة للمقاومة P . وتستعمل هذه الآلية لكسر الأحجار وكذلك لكبس القطع مع بعضها.

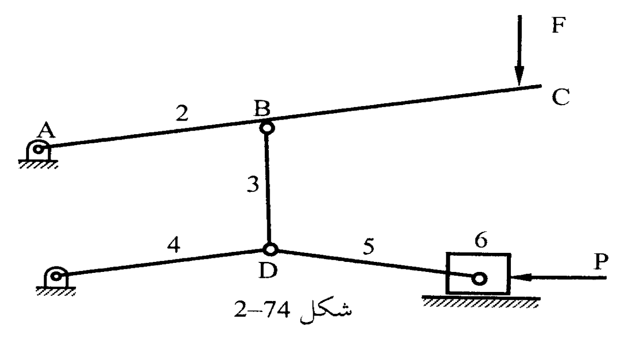


شكل 72-2

ويوضح شكلي 73-2 , 74-2 آلتين شبيهتين بالآلية السابقة. ويلاحظ في هذين الشكلين أن ABC هو ضلع واحد متماسك يتصل مع الضلع BD بالوصلة B.

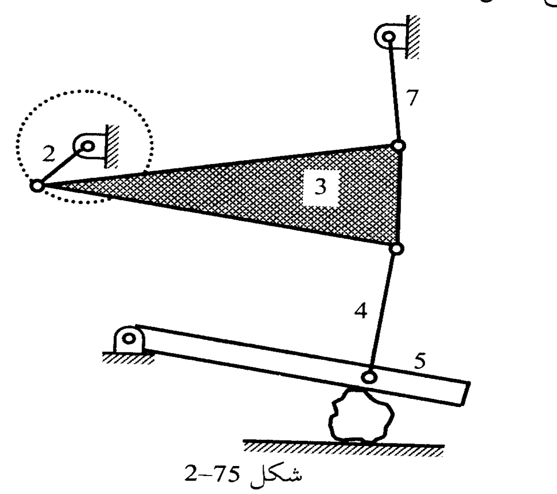


شكل 73-2



شكل 74–2

ويوضح شكل 75–2 آلية أخرى تستخدم لتكسير الحجارة.

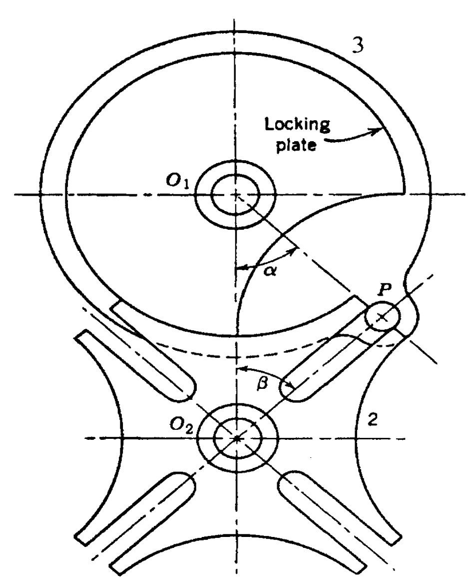


شكل 75–2

2.9 آليات الحركة المتقطعة Intermittent mechanisms

في كثير من الحالات يلزم تحويل الحركة المستمرة إلى حركة متقطعة. والآلية الموضحة في شكل 76–2 والمعروفة بآلية جنيف (نجمة جنيف) Geneva mechanism تحول الحركة الدائرية المستمرة للقائد (العجلة 3) إلى حركة دائرية متقطعة للنجمة 2. فعندما تدخل الأسطوانة P (roller أي تدور الأسطوانة حول مركزها لتقليل الاحتكاك) في إحدى المجارى slots في النجمة 2 فإن دوران الضلع القائد

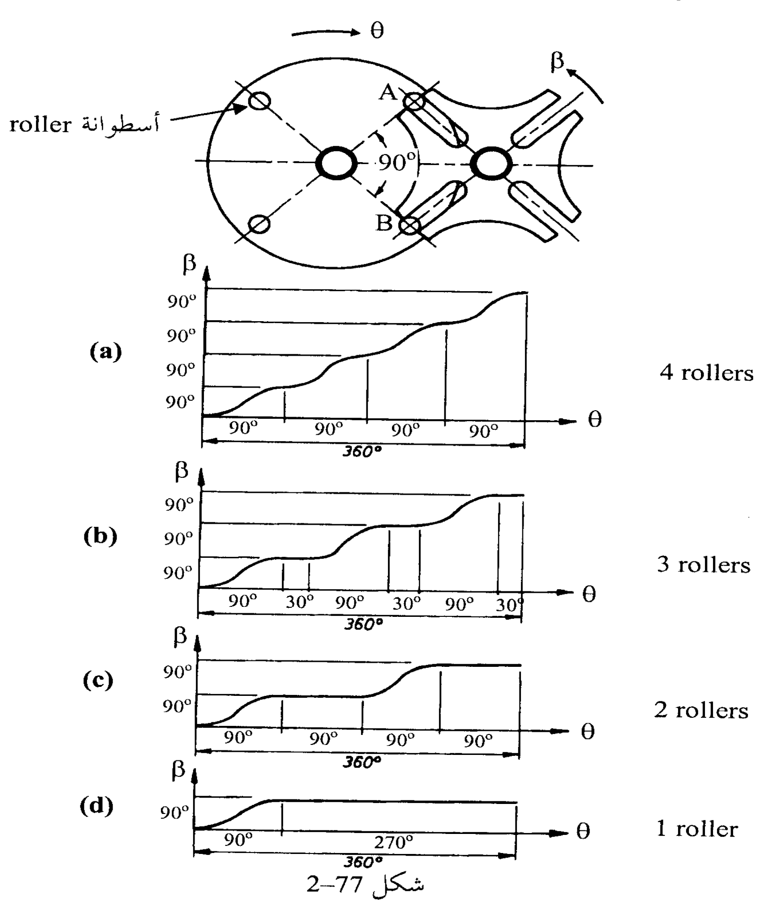
3 بمقدار 90^o يؤدي إلى دوران الضلع 2 بمقدار 90^o حتى تخرج الأسطوانة من المجرى. وبعد ذلك تكمل العجلة 3 الدوران دون أن تدور النجمة 2 حتى تعود الأسطوانة P لتدخل في المجرى التالي. ويلاحظ أن لوح التثبيت locking plate يستعمل لمنع النجمة 2 من الدوران أثناء وجود الأسطوانة P خارج المجرى ، ويستمر هذا السكون للنجمة (يسمى dwell) مدة دوران القائد ثلاثة أرباع اللفة .



شكل 76–2

وهناك عدد كبير من الأشكال من هذه الآلية تختلف عن بعضها من حيث عدد المجاري في النجمة وعدد الأسطوانات على الضلع الدوار. ويبين شكل 77–2 تأثير عدد الأسطوانات (rollers) على الحركة الناتجة في حالة نجمة ذات أربعة مجاري بين كل واحد والذي يليه 90^o ، حيث يبين شكل 77(a)–2 أنه في حالة وجود أربع أسطوانات بين كل واحدة والتي تليها 90^o ، فإن دوران القائد دورة كاملة $(\theta=360^o)$ يتبعه دوران النجمة دورة كاملة $(\beta=360^o)$ بواقع ¼ دورة للنجمة لكل ¼ دورة للقائد ، وفي هذه الحالة تدخل الأسطوانة A إلى مجرى slot في اللحظة التي تخرج

فيها الأسطوانة B من المجرى السابق له كما يبين ذلك رسم الآلية الموجود في أعلى الشكل ، وفي هذه الحالة لا يوجد لوح للتثبيت لأنه في جميع مراحل الحركة تكون إحدى الأسطوانات موجودة في أحد المجاري في النجمة.



شكل 77-2

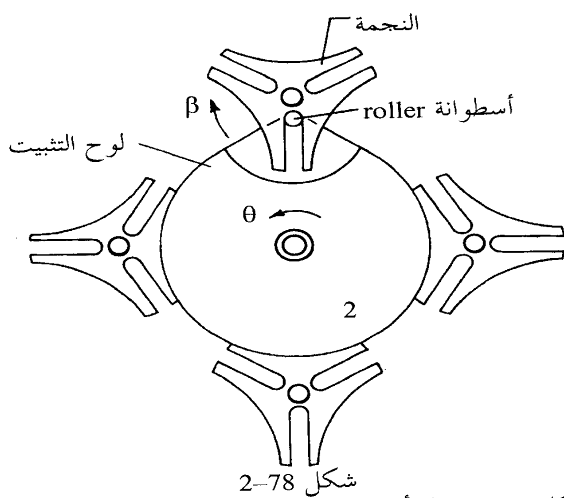
أما في حالة وجود ثلاث أسطوانات ، الزاوية بين كل واحدة والتي تليها 120° ، فإن شكل 77(b)-2 يبين أن دوران القائد لفـــة كاملة $(\theta = 360^\circ)$ يتبعـــه دوران

النجمة ثلاثة أرباع اللفـــة (β=270°) حيث ينتج من دوران القائد زاوية θ =90° دوران النجمة ¼ دورة (β=90°) ثم سكونها dwell بينمـــا يدور القـــائد زاوية θ =30° ،ويظهر هذا السكون على هيئة خط أفقي في الشكل .

أما في حالة وجود أسطوانتين بين كل واحـــدة والتي تليها 180° فإن شـــكل 2–77(c) يبين أن دوران القائد لفة كاملة (θ=360°) يتبعه دوران النجمة نصف لفة (β=180°) حيث ينتج من دوران القائد زاوية θ =90° دوران النجمة ¼ دورة (β=90°) ثم سكونها dwell بينما يدور القائد زاوية θ =90° ، ويظهر هذا السكون على هيئة خط أفقي في الشكل .

ويبين شكل 2–77(d) حالة وجود أسطوانة واحدة وهي الحالة المرسومة في شكل 2–76 وفيها تدور النجمة زاوية β=90° نتيجة لدوران القائد زاوية θ =90° ثم تسكن أثناء دوران القائد باقي اللفة ، أي حتى تصل الزاوية θ إلى 360°.

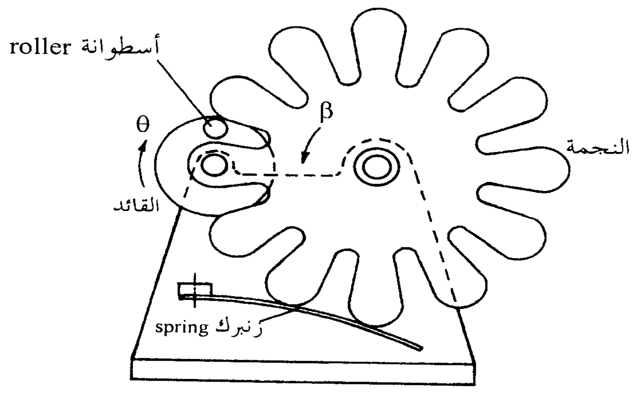
ويبين شكل 2–78 تطبيقا آخر تستعمل فيه آلية جنيف حيث يقوم الضلع 2 عند دورانه لفة واحدة بتحريك أربع نجمات بالتتابع يدور كل واحدة منها بزاوية β=120° لأن النجمة يوجد فيها ثلاثة مجاري.



شكل 2–78

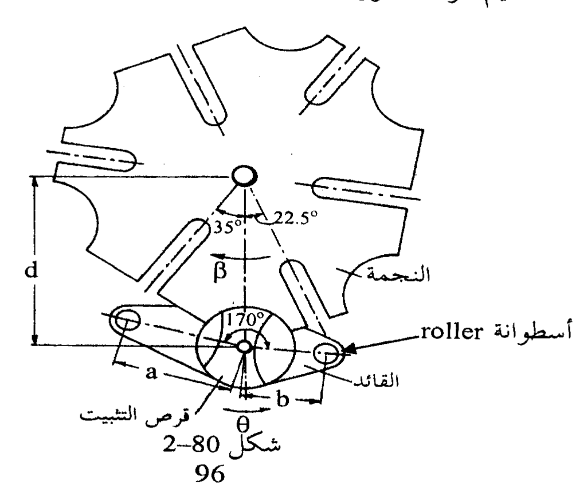
ويبين شكل 2–79 حالة أخرى تستعمل فيها آلية جنيف حيث تدور النجمة (التي يوجد فيها 12 مجرى) بزاوية β=30° عند دوران الضلع القائد لفة واحدة ويقوم

الزنبرك يمنع النجمة من الدوران عندما تكون الأسطوانة خارج المجرى.



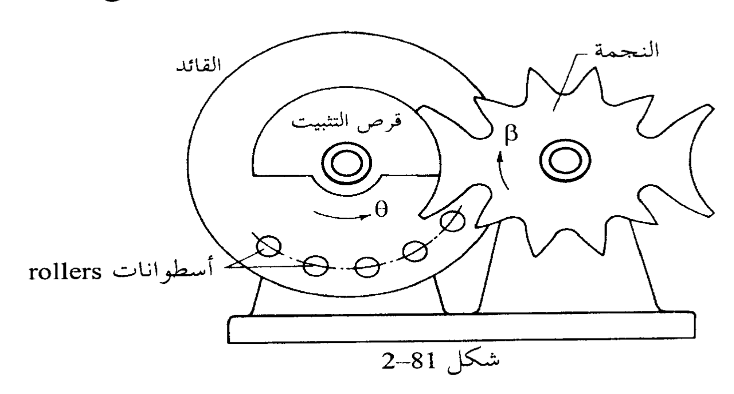
شكل 79–2

ويبين شكل 80–2 تصميما آخر لآلية جنيف وفيه تستعمل أسطوانتان على الذراع القائد ليستا على استقامة واحدة وليستا على بعد متساوٍ من مركز الدوران ، والنجمة تحتوي مجاري متفاوتة الطول وعلى زوايا غير متساوية من بعضها. والهدف من هذا التصميم هو أن تدور النجمة بزوايا معينة غير متساوية نتيجة لدوران القائد.



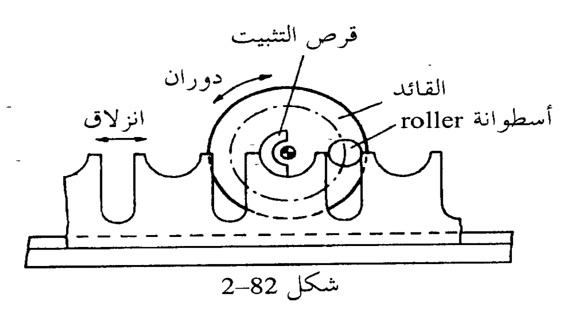
شكل 80–2

ويبين شكل 81-2 تصميما آخر لآلية جنيف وفيه تستعمل خمس أسطوانات على الضلع القائد لإدارة النجمة زاوية $\beta=180^o$ نتيجة لدوران القائد لفة كاملة ، ويقوم قرص التثبيت بمنع النجمة من الدوران عندما تكون الأسطوانات خارج المجاري.



شكل 81-2

ويبين شكل 82-2 تصميما آخر تستعمل فيه آلية جنيف لتحويل الحركة الدورانية للقائد إلى حركة انزلاقية.



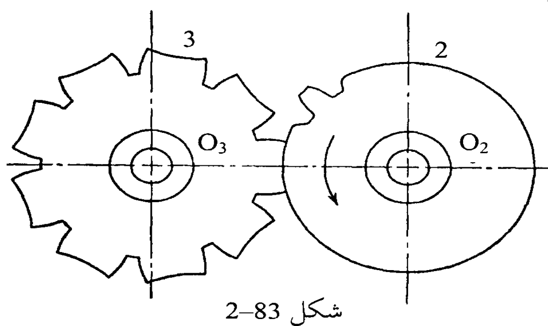
شكل 82-2

وهناك تصميمات أخرى كثيرة لآلية جنيف [١] تستعمل لأغراض متنوعة.

وهناك تصميم آخر لآليات الحركة المتقطعة موضح في شكل 83-2 ويستعمل ترس 2 ذو سنة واحدة وعجلة 3 لها تسنين خاص بحيث يتحول الدوران المستمر

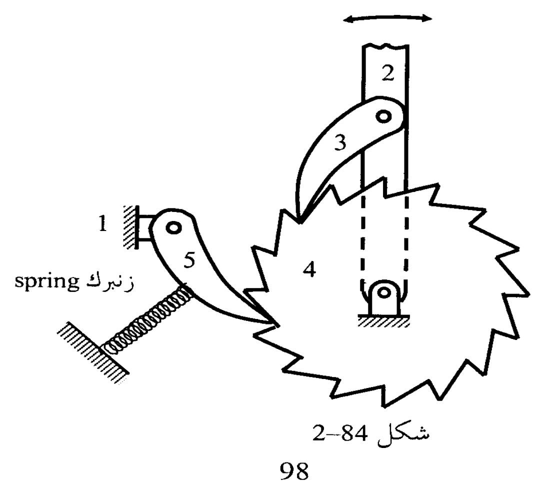
(١)انظر مثلا كتب Jensen و Chironis .

للترس 2 إلى حركة متقطعة للعجلة 3 أثناء دخول السنة في فراغات الأسنان الموجودة في العجلة 3 . ولمنع العجلة 3 من الدوران في الاتجاه المعاكس فإن تحدب الترس 2 يطابق تقعر العجلة 3 بين فراغات الأسنان.



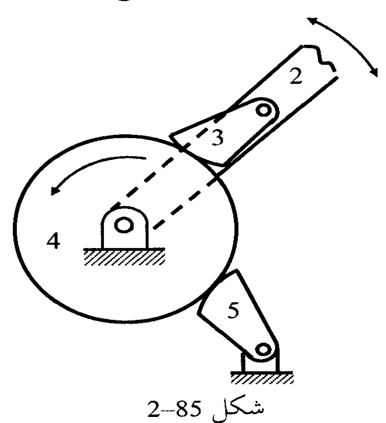
شكل 83–2

أما شكل 84–2 فيوضح تركيب آلة أخرى من آليات الحركة المتقطعة هي آلية الترس والسقاطة Ratchet فعندما يتحرك الذراع 2 يسارا فإن السقاطة 3 تدفع الترس 4 للدوران عكس عقرب الساعة ، وعندما يتحرك الذراع 2 يمينا فإن السقاطة تنتقل على أسنان الترس 4 ولا تسبب دورانه بينما تقوم السقاطة 5 بمنع دوران الترس في الاتجاه المعاكس عند تحرك الذراع 2 ناحية اليمين.



شكل 84–2

ويوضح شكل 85–2 تصميما آخر يؤدي نفس الغرض ولكن بدون الضوضاء التي تتسبب عن انتقال السقاطات على أسنان الترس. وفي هذا التصميم فإن تحريك الذراع 2 لأعلى يؤدي إلى أن يقوم الجزء 3 بدفع العجلة 4 عكس عقرب الساعة. أما تحريك الذراع لأسفل فلا يسبب دوران العجلة بينما يقوم الجزء 5 .بمنع دوران العجلة في الاتجاه المعاكس أثناء حركة الذراع 2 لأسفل.

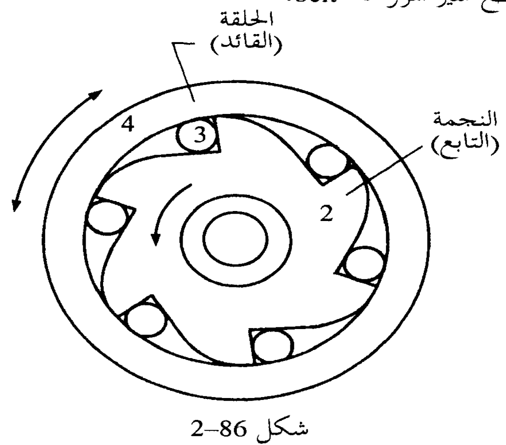


شكل 85–2

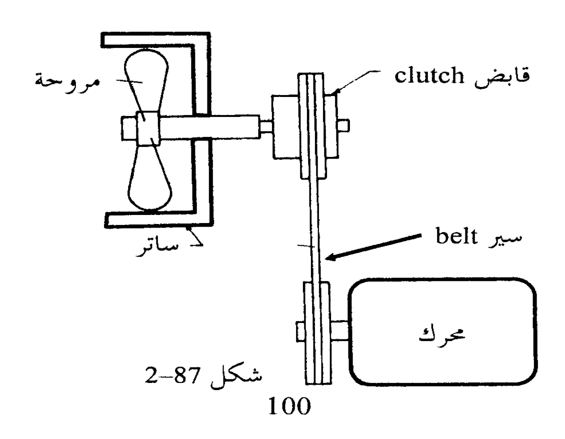
أما شكل 86–2 فيوضح تركيب آلية أخرى تستعمل في غرضين ، أولهما كآلية من آليات الحركة المتقطعة: فعندما تتحرك الحلقة الخارجية 4 عكس عقرب الساعة فإن الكرات (أو الأسطوانات) الصلبة 3 تدفع الضلع 2 (النجمة) للدوران عكس عقرب الساعة نتيجة ضغط هذه الكرات على السطح المائل في الفراغ بين الضلعين 4 و 2 ، وعندما تتحرك الحلقة الخارجية 4 مع عقرب الساعة فإن الكرات الصلبة 3 تكون حرة ولا تسبب دورانا للنجمة ، وبهذا تتحول الحركة التذبذبية للحلقة الخارجية إلى حركة متقطعة عكس عقرب الساعة للنجمة 2. ويمكن عكس الأدوار بأن يكون القائد هو الضلع 2 (النجمة) وفي هذه الحالة تتحول الحركة التذبذبية للنجمة إلى حركة متقطعة مع عقرب الساعة للحلقة الخارجية 4 .

أما الغرض الثاني الذي تستعمل فيه هذه الآلية فهو استعمالها كقابض للحركة الفائضة overrunning clutch (قابض ذو اتجاه واحد) ولشرح ذلك نفترض أن القائد

هو الضلع 2 (النجمة) وفي هذه الحالة يدور مع عقرب الساعة وتدور معه الحلقة الخارجية 4 في نفس الاتجاه ، فإذا توقفت النجمة عن الدوران فإن الحلقة الخارجية 4 يمكنها الاستمرار في الدوران بحـــرّية. ويبين شكل 87-2 أهمية استعمال مثل هذا القابض مع مروحة التبريد في السيارة حيث تدور المروحة نتيجة لدوران المحرك ، فإذا توقف المحرك فإن القابض يسمح للمروحة بالدوران بحرية حتى تتوقف لأنه إذا لم يستعمل القابض فإن كمية الحركة للمروحة momentum عند توقف المحرك ستولد عزما يتسبب في قطع سير المروحة belt.



شكل 86-2

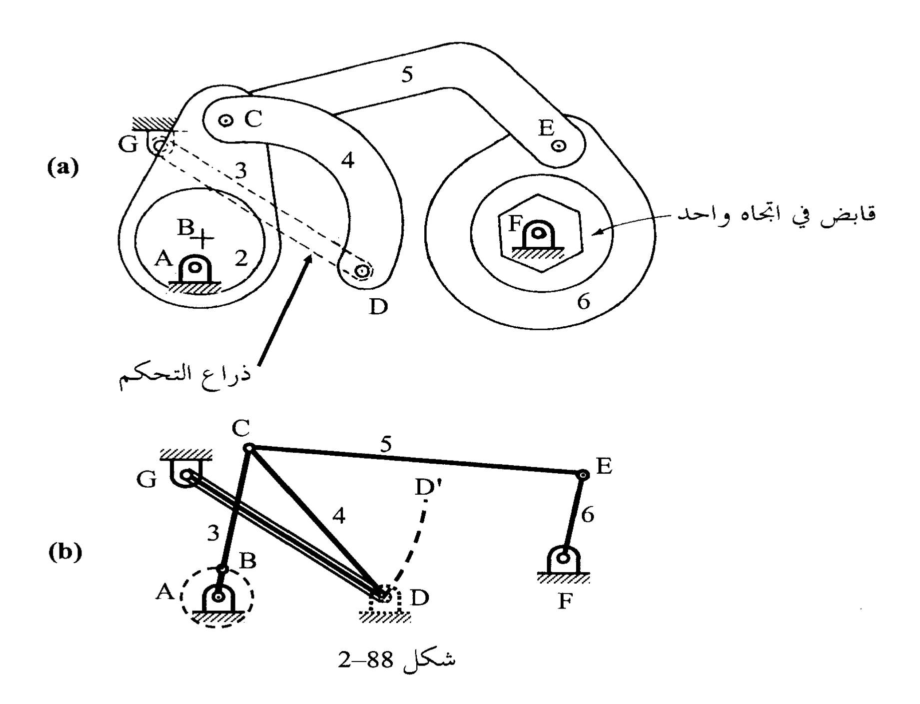


شكل 87-2

ويبين شكل (a)88–2 تطبيقا آخر على القابض ذو الاتجاه الواحد ، وهو آلية لتغيير نسبة السرعة الخارجة إلى السرعة الداخلة إلى أي نسبة (في مدى معين) وليس إلى نسب محددة كما هو الحال في صندوق التروس العادي. وتتكون الآلة ، كما يوضح ذلك مخطط تحليل الحركة في شكل (b)88–2 ، من الآلية الرباعية ABCD حيث الضلع 2 هو قرص دائري مثبت في القاعدة عن طريق وصلة دورانية hinge عند النقطة اللامركزية A ، وحيث النقطة D هي وصلة دورانية أيضا تُعَامَل كأنها مثبتة في القاعدة في الوضع المبين في الشكل . ويلاحظ أن المسافة BC لا تتغير أثناء الحركة ولذلك نعامل الخط BC كأنه ضلع جامد. ونتيجة لدوران الضلع AB يتذبذب الضلع 4 ، وهذا الضلع يعتبر الضلع القائد في الآلية الرباعية الثانية DCEF ، ولذلك فإن المُخْرَج النهائي output هو تذبذب الضلع 6 . وبالرجوع إلى شكل (a)88–2 نلاحظ أن هذا الضلع (EF) يتكون من حلقة خارجية داخلها قابض ذو اتجاه واحد يسمح لعمود الدوران shaft المثبت في الوصلة F بالدوران في اتجاه واحد وبذلك ينتج من دوران الضلع AB دوران العمود F في اتجاه واحد بصورة متقطعة.

وللحصول على سرعة منتظمة للعمود F فإن عددا من الآليات المتوازية والمطابقة لتلك المبينة في شكل (a)88–2 تستعمل بحيث تشترك كلها في الوصلات A , D , F ولكن زاوية الضلع AB مع الأفقي تختلف من آلية لأخرى (out of phase).

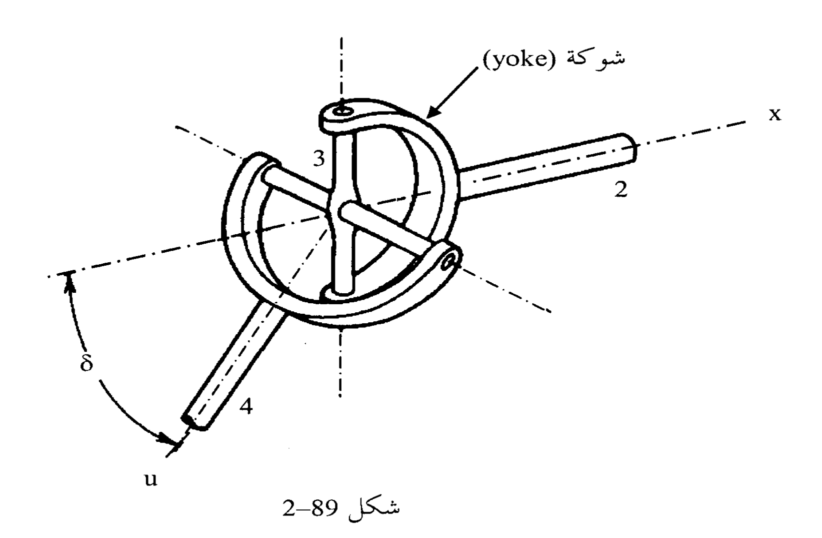
ويتم تغيير نسبة السرعة الخارجة إلى السرعة الداخلة عن طريق إدارة ذراع التحكم GD بحيث تتحرك الوصلة D على القوس الدائري D'D ، وبعد الحصول على نسبة السرعة المطلوبة يتم تثبيت الذراع GD وبذلك تصبح الوصلة D كأنها مثبتة في القاعدة. ويمكن إثبات أن نسبة السرعة الخارجة إلى السرعة الداخلة تقل باقتراب D من الخط CE .



شكل 88–2

2.10 آلية هوك Universal (Hooke's) Joints

تستعمل هذه الآلية في نقل الحركة الدورانية بين عمودي إدارة (shafts) بينهما زاوية δ كما هو مبين بشكل 89–2 وتتكون من شوكتين مقوستين (yokes) إحداهما مثبتة في العمود 2 والثانية في العمود 4 بحيث تتشابك كل منهما مع الصليب 3 عن طريق وصلة دورانية عند نهاية كل طرف من أطراف الصليب. وفي الفصل الثالث ستتم مناقشة معادلات الإزاحة والسرعة لهذه الآلية ومنها سيتبين أن أهم عيب من عيوب هذه الآلية هو أنه إذا دار العمود القائد 2 (driving shaft أو driver) بسرعة منتظمة فإن العمود التابع 4 (driven shaft أو follower) يدور بسرعة غير منتظمة مما ينتج عنه عجلة دورانية تتسبب في حدوث اهتزازات وإجهادات إضافية في الآلة.

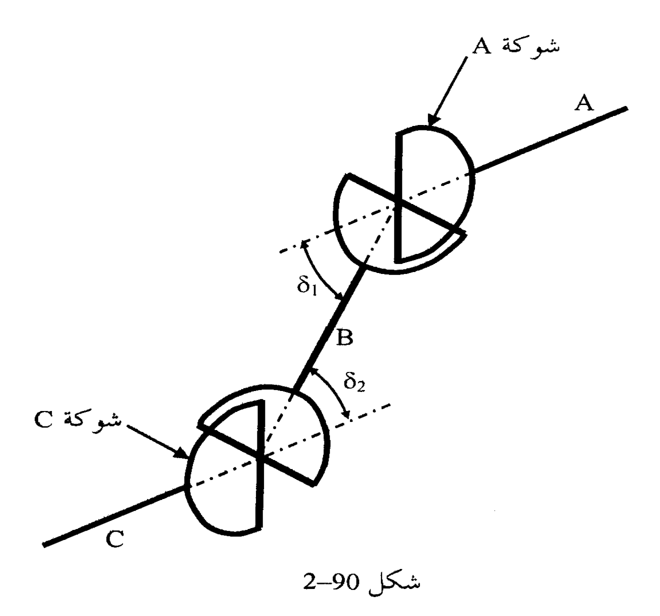


شكل 89–2

ويمكن التغلب جزئيا على هذه المشكلة باستخدام وصلتين من هذا النوع كما هو مبين بشكل 90–2 بحيث تكون سرعة العمود A منتظمة. وبسبب الوصلة الأولى تكون سرعة العمود B غير منتظمة ، وتعكس الوصلة الثانية الوضع بحيث تنتج عن سرعة العمود B غير المنتظمة سرعة منتظمة للعمـــود C بحيث تكون سرعتا العمودين A و C متساويتين دائما أثناء الدوران . وهناك شرطان لتحقق ذلك ، أولهما أن تكون الزاويتان δ_1 و δ_2 متساويتين والثاني أنه عندما تكون الشوكة A في مستوى العمودين A و B فإن الشوكة C يجب أن تكون في مستوى العمودين B و C . وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها العمودان A و C متوازيين تكون الشوكتان A و C متوازيتين.

والتصميم المبين في شكل 90–2 يجعل مشكلة الدوران بسرعة غير منتظمة محصورا في العمود B فقط ، فإذا كان وزن هذا العمود صغيرا بالنسبة لباقي الآلة فإن تأثير سرعته غير المنتظمة لا يكون كبيرا على الآلة. وهذا التصميم يستعمل في نقل الحركة

من المحرك إلى العجلات الخلفية في سيارات الدفع الخلفي. أما في سيارات الدفع الأمامي فلا تصلح وصلة هوك لنقل الحركة من المحرك إلى العجلات الأمامية بل يجب استعمال تصميمات أخرى بحيث تكون سرعة التابع مساوية لسرعة القائد في كل الأوقات ، ومثل هذه الوصلات تكون أكثر كلفة وتعقيدا من وصلة هوك.



شكل 90–2

الفصل الثالث
تحليل الآليات بالطرق الهندسية
Mathematical Analysis Using Trigonometric Relations

كان التركيز في معظم الفصل السابق علي استعمال الطرق البيانية (الرسم) لدراسة حركة بعض أنواع الآليات الشائعة الاستعمال. أما في هذا الفصل فستتم مناقشة الطريقة الأولى من الطرق التحليلية لدراسة الحركة وهي المعتمدة على العلاقات الهندسية. ويبدأ الحل بإيجاد العلاقات الهندسية التي تصف معادلات الموضع للوصلات والأضلاع ثم أجراء عمليات الاشتقاق (التفاضل) بالنسبة إلى الزمن لإيجاد معادلات السرعة والعجلة لأجزاء الآلية المختلفة.

وترجع أهمية تحليل السرعة في الآليات إلى سببين ، أولهما أن زمن أداء المهمة المطلوبة من الآلية يعتمد أساسا على سرعة حركة أجزائها. أما السبب الثاني فهو أن القدرة power التي تنقلها الآلية هي حاصل ضرب القوة في السرعة ، ومعلوم أنه دائما من المرغوب فيه تقليل مقدار القوى في أجزاء الآلية لأنها تسبب إجهادات وتآكل في هذه الأجزاء ولهذا فإن إيجاد السرعة يساعد على التحكم في مستويات القوي في الآلية عن طريق تغيير أبعادها والحصول على سرعات تجعل مقادير هذه القوى مناسبة.

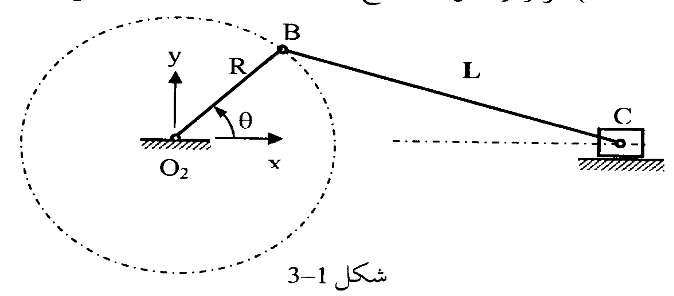
أما إيجاد العجلة في الآليات فترجع أهميته إلى أن القوى المتولدة أثناء الحركة inertia forces في أضلاع الآلية تعتمد (من قانون نيوتن) على كتلة الأضلاع وعجلاها ، وهذه القوى تؤثر على الإجهادات في الأضلاع وكذلك على الاهتزازات والضوضاء الناتجة من الحركة.

وفيما يلي تطبيق الطريقة على بعض الآليات الشائعة.

3.1 آلية المنزلق (المكبس) Crank–slider mechanism

تتكون هذه الآلية المبينة في شكل 1–3 من الذراع الدوار O_2B (crank) وذراع التوصيل BC (connecting rod) والمنـــزلق أو المكبس (slider or piston). ويعرف موضع الذراع O_2B بدلالة الزاوية θ التي تقاس عكس عقرب الساعة من الاتجاه

الموجب للمحور الأفقي x والذي يبدأ عند نقطة O_2 وهي مركز عمود الإدارة (crank shaft). ويرمز لطول الذراع الدوار بالرمز R ولطول ذراع التوصيل بالرمز L.



شكل 3-1

3.1.1 حركة المنزلق

لدراسة حركة هذه الآلية يفترض أن الذراع O_2B يدور بسرعة ω_2 عكس عقرب الساعة (وهذا يعتبر الاتجاه الموجب). ويمكن استنتاج المسافة O_2C المبينة في شكل 3-2 والتي تمثل الإحداثي الأفقي للمنـــزلق X_c عن طريق إسقاط العمود BE على O_2C. من المثلثين BEC ، BEO_2 نلاحظ أن طول BE هو:

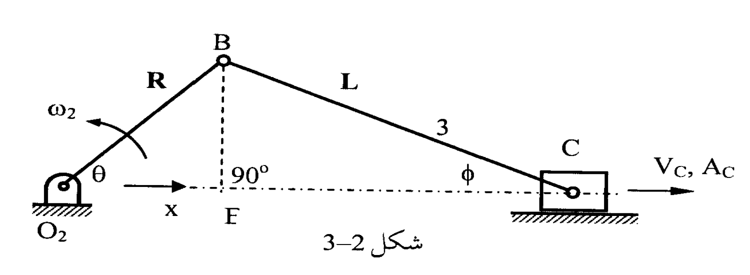
$$BE = L \sin \phi = R \sin \theta$$

أي أن الزاوية ϕ هي:

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta}{n} \right) \qquad (3-1)$$

حيث

$$n = \frac{L}{R}$$



شكل 3-2

ويكون الإحداثي الأفقي للمنزلق X_c هو مجموع الطولين CE و O_2E أي أن:

$$X_c = R\cos\theta + L\cos\phi \qquad \text{(i)}$$

ويمكن التخلص من الزاوية ϕ في الطرف الأيمن للمعادلة كما يلي:

$$\cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi}$$

ومن المعادلة (3–1) يمكن التعويض عن $\sin\phi = \dfrac{\sin\theta}{n}$ ثم باستخدام مفكوك $(\sin\theta)$

$$\cos\phi = \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}} = 1 - \frac{\sin^2\theta}{2n^2} - \frac{\sin^4\theta}{8n^4} - \ldots.$$

وعندما تكون n كبيرة تتلاشى قيم الحدود في المفكوك بحيث يمكن الاكتفاء بحدين فقط ، وبالتعويض في الطرف الأيمن من المعادلة (i) عن $\left(\cos\phi = 1 - \dfrac{\sin^2\theta}{2n^2}\right)$ مع ملاحظة أن $n = \dfrac{L}{R}$ نحصل على:

$$X_c \approx R\cos\theta + R\left(n - \frac{1}{2n}\sin^2\theta\right) \qquad (3\text{–}2)$$

والآن بإجراء عملية الاشتقاق (التفاضل) بالنسبة للزمن للطرف الأيمن من المعادلة (3–2) لإيجاد معادلات السرعة V_c والعجلة A_c مع ملاحظة أن $\omega_2 = \dfrac{d\theta}{dt}$ وأن $\alpha_2 = \dfrac{d\omega_2}{dt}$ حيث t هو الزمن ، وأن $V_c = \omega_2 \dfrac{dx_c}{d\theta}$ وكذلك أن $A_c = \omega_2 \dfrac{dV_c}{d\theta} + \dfrac{\alpha_2}{\omega_2} V_c$ ، يمكن إثبات أن:

$$V_c = -\omega_2 R\left(\sin\theta + \frac{1}{2n}\sin 2\theta\right) \qquad (3\text{–}3)$$

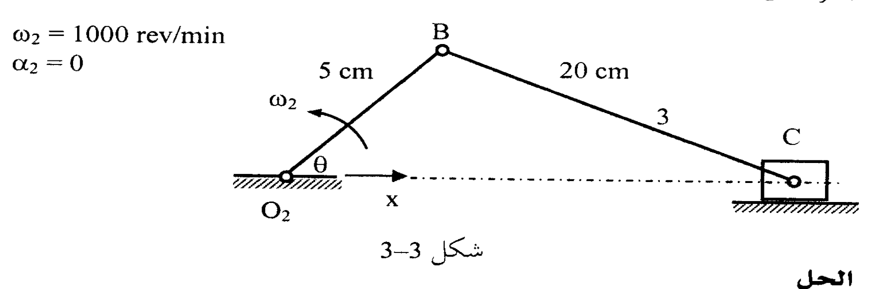
$$A_c = -\omega_2^2 R\left(\cos\theta + \frac{1}{n}\cos 2\theta\right) + \frac{\alpha_2}{\omega_2} V_c \qquad (3\text{–}4)$$

ولابد من تذكر أن المعادلتين (3–3) و (3–4) هما معادلتان تقريبيتان وأن دقتهما تعتمد على قيمة n وهي عادة أكبر من 1.0 في معظم الآليات ، فمثلا في آلات الاحتراق الداخلي تتراوح n في معظم التصميمات بين 3 و 5 ولذلك تكون

دقة المعادلتين مقبولة ، وهذا يفسر سبب الانتشار الواسع في استعمالهما رغم أنهما تقريبيتان ويرجع ذلك إلى سهولة تطبيقهما واستخراج ثروة من المعلومات عن الآلية بسرعة ويسر كما ستبين أمثلة الباب الحالي. أما في الحالات التي تكون فيها n أصغر من 1.0 فيلزم استعمال المعادلات الصحيحة وهما المعادلتان (16–4) و (19–4) اللتان سيتم إثباتهما في الباب الرابع[١].

مثال 1–3:

ارسم منحنى يبين تغير قيم السرعة والعجلة للمنـــزلق (المكبس) المبين في شكل 3–3 عندما يدور الذراع الدوار (crank) نصف دورة (أي في المدى $0 \leq \theta \leq 180^{o}$) بسرعة ω_2 منتظمة مقدارها $\omega_2 = 1000$ rev/min .



شكل 3–3

الحل

$\omega_2 = (1000 \text{ rev/min}) (2\pi/60) = 104.72 \text{ rad/s}$
$n = L/R = 20/5 = 4$

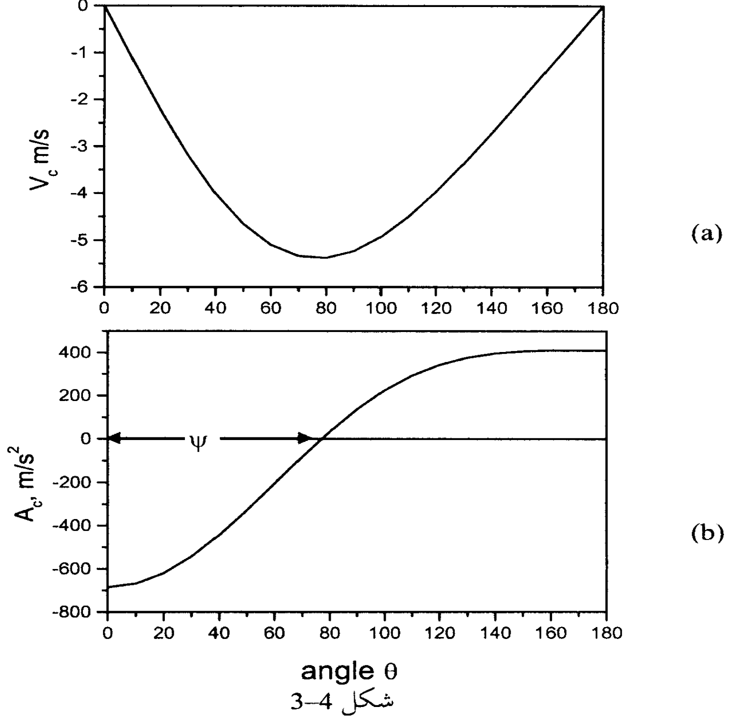
بالتعويض في المعادلتين (3–3) ، (4–3) عن قيم $\theta = 0,10,20,\ldots,180$ يمكن الحصول على المنحنيين المبينين في شكل 4–3.

ويلاحظ من هذين المنحنيين أن السرعة تكون صفرا عندما تكون $\theta = 0$ (وهذا هو موضع السكون الأقصى) بينما تكون العجلة أكبر ما يمكن (الإشارة السالبة تعني أن اتجاه العجلة ناحية اليسار). ومع زيادة الزاوية θ تستمر السرعة في الزيادة

---

(١) مثال (6-6) في الباب السادس يقارن المعادلتين (3–3) و (4–3) مع المعادلتين (16–4) و (19–4) ويظهر أنه عندما تكون n=0.5 تكون سرعة المنـــزلق المحسوبة من (3–3) أقل بنسبة 4.2% عن المحسوبة من (16–4) وتكون عجلة المنـــزلق المحسوبة من (4–3) أقل بنسبة 12.22% عن المحسوبة من (19–4) .

حتى تصل إلى أقصى قيمة لها ثم تأخذ في التناقص حتى تصل إلى الصفر مرة أخرى عندما تكون $\theta = 180^o$ (وهذا هو موضع السكون الأدنى).



شكل 4–3

مثال 2–3:

في الآلية المبينة في شكل 3–3 احسب أقصى سرعة وأقصى عجلة للمكبس وعين زاوية الذراع الدوار التي تحدث عندها كل واحدة من هذه القيم القصوى على فرض أن ω_2 منتظمة.

الحل:

أقصى سرعة لنقطة C تحدث عندما تكون العجلة $A_C = 0$ وذلك لأن النهاية العظمى للسرعة تكون حيث مشتقة السرعة (وهى العجلة) تساوي صفرا وهذا يحدث

عند زاوية تساوى (ψ) كما هو مبين في شكل 4–3. وبوضع $A_C = 0$ في المعادلة (4–3) والاختصار نجد أن الزاوية ψ هي:

$$\psi = \cos^{-1}\left(\frac{-n + \sqrt{8 + n^2}}{4} \right) \qquad (3\text{–}5)$$

وبالتعويض في المعادلة (3–3) تكون أقصى سرعة $V_{C\,max}$ هي:

$$V_{C\,max} = -\,\omega_2\,R\,\left(\sin\psi + \frac{1}{2n}\sin 2\psi \right) \qquad (3\text{–}6)$$

ومن شكل 4–3 يتضح أن أقصى قيمة عددية للعجلة هي عند الزاوية $\theta = 0$ وبالتعويض في المعادلة(4–3) نجد أن أقصى عجلة $A_{C\,max}$ هي:

$$A_{C\,max} = -\,\omega_2^2\,R\,\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad (3\text{–}7)$$

وبالتعويض العددي في هذه المعادلات نجد أن:

$n = 4$

$\psi = 77^{o}$

$V_{C\,max} = -5.389$ m/s

$A_{C\,max} = -685.4$ m/s^2

3.1.2 النقاط الأخرى على ذراع التوصيل

يمكن استنتاج إحداثيات أي نقطة على ذراع التوصيل ، مثل النقطة P المبينة في شكل 5–3 ، كالآتي:

$$x_P = R\cos\theta + d\cos\phi = R\cos\theta + \frac{d}{n}\left(n - \frac{1}{2n}\sin^2\theta \right) \qquad (3\text{–}8)$$

$$y_P = (L - d)\sin\phi = \frac{L - d}{n}\sin\theta \qquad (3\text{–}9)$$

حيث x_P هو الإحداثي الأفقي للنقطة P ، y_P هو الإحداثي الرأسي لها. والآن بإجراء عملية الاشتقاق (التفاضل) بالنسبة للزمن لإيجاد معادلات السرعة يمكن إثبات أن:

$$V_P^x = -\omega_2 R \left(\sin\theta + \frac{m}{2n} \sin 2\theta \right) \quad (3\text{–}10)$$

$$V_P^y = \omega_2 R (1-m) \cos\theta \quad (3\text{–}11)$$

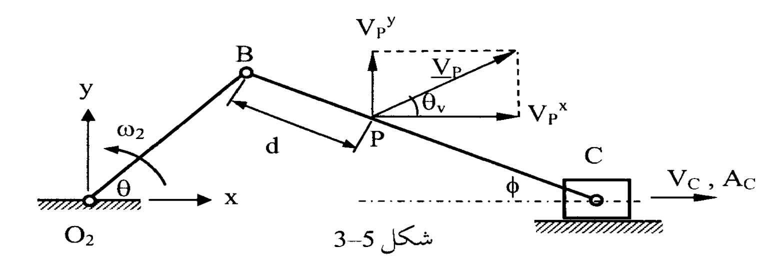
$$m = \frac{d}{L}$$

حيث V_P^x ، V_P^y هي مركبات سرعة النقطة P في اتجاه المحورين y , x. ويوضح الشكل هذه المركبات ومحصلتها $\underline{V}_P$ وكذلك الزاوية θ_v وهي تمثل اتجاه سرعة النقطة وتقاس عكس عقرب الساعة بدءا من المحور x . والآن بإجراء عملية التفاضل بالنسبة للزمن مرة أخرى لإيجاد معادلات العجلة يمكن إثبات أن:

$$A_P^x = -\omega_2^2 R \left(\cos\theta + \frac{m}{n} \cos 2\theta \right) + \frac{\alpha_2}{\omega_2} V_P^x \quad (3\text{–}12)$$

$$A_P^y = -\omega_2^2 R (1-m) \sin\theta + \frac{\alpha_2}{\omega_2} V_P^y \quad (3\text{–}13)$$

حيث A_P^x ، A_P^y هي مركبات عجلة النقطة P في اتجاه المحورين y , x.



شكل 3–5

مثال 3–3:

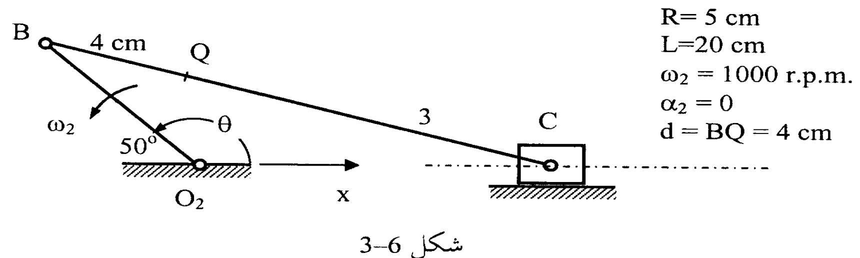
في الآلية المبينة في شكل 3–3 والمبينة مرة أخرى في شكل 3–6 عين إحداثيات النقطة Q واحسب سرعة وعجلة هذه النقطة مقدارا واتجاها.

الحل: الزاوية 50° المعطاة في الرسم ليست هي الزاوية θ المستعملة في المعادلات، بل إن الزاوية θ هي الزاوية المبينة بالرسم حيث قيمتها 130°. وبالتعويض نجد أن:

$\omega_2 = 1000$ rev/min . $(2\pi/60) = 104.72$ rad/s

$n = L/R = 20/5 = 4$

$m = d/L = 4/20 = 0.2$



شكل 6–3

إحداثيات النقطة Q هي:

$$x_Q = R\cos\theta + \frac{d}{n}\left[n - \frac{1}{2n}\sin^2\theta\right] = 2\cos130 + (4/4)[4-(\sin^2 130)/8] = 0.71 \text{ cm}$$

$$y_Q = \frac{L-d}{n}\sin\theta = (20-4)(\sin130)/4 = 3.06 \text{ cm}$$

سرعة النقطة Q هي:

$$V_Q^x = -\omega_2 R\left(\sin\theta + \frac{m}{2n}\sin 2\theta\right) = -(104.72)(5)(\sin130+0.2\sin260) = -388 \text{ cm/s}$$

$$V_Q^y = \omega_2 R(1-m)\cos\theta = -(104.72)(5)(1-0.2)\cos130 = -269 \text{ cm/s}$$

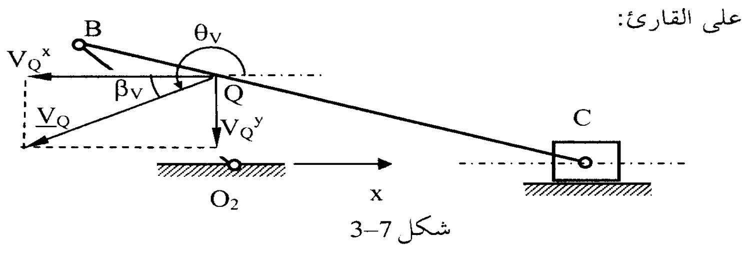
$$V_Q = \sqrt{(V_Q^x)^2 + (V_Q^y)^2} = 472 \text{ cm/s}$$

$$\beta_V = \tan^{-1}(V_Q^y / V_Q^x) = \tan^{-1}(269 / 288) = 34.7^o$$

عند حساب الزاوية β_V وهي تمثل اتجاه سرعة النقطة فإن إشارات كل من V_Q^x ، V_Q^y تهمل، وفي هذه الحالة تكون الزاوية β_V مقاسة من المتجه V_Q^x كما هو مبين بشكل 7–3 . أما الزاوية θ_V وهي تمثل اتجاه السرعة V_Q مقاسة من الاتجاه الموجب من محور x فتكون قيمتها:

$$\theta_V = 34.7 + 180 = 214.7^o$$

وقد ناقش الفصل الأول طريقة مباشرة (يمكن برمجتها في الحاسوب) لإيجاد الزاوية θ_V (وهي تصلح لإيجاد اتجاه محصلة أي مركبتين ولا تقتصر على دراسة السرعة فقط) باستخدام المعادلتين (1–15) و (1–16) واللتان أعيدت كتابتهما فيما يلي للتسهيل على القارئ:



شكل 3–7

*إذا كانت المركبة الأفقية موجبة (في هذه الحالة V_Q^x) ، تكون زاوية المحصلة مع المحور الأفقي x هي (بصرف النظر عن إشارة المركبة الرأسية V_Q^y):

$$\theta_V = \tan^{-1} (V_Q^y / V_Q^x) \qquad (1\text{–}15)$$

*إذا كانت المركبة الأفقية سالبة:

$$\theta_V = \tan^{-1} (V_Q^y / V_Q^x) + 180^o \qquad (1\text{–}16)$$

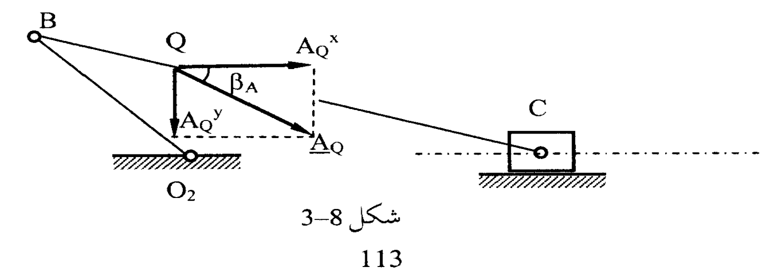
وفي المثال الحالي تستعمل المعادلة (1–16) لأن V_Q^x سالبة :

$$\theta_V = \tan^{-1} (-269 / -388) + 180^o = 214.7^o$$

أما عجلة النقطة Q كما هو مبين في شكل 3–8 فهي:

$$A_Q^x = -\omega_2^2 R \left(\cos\theta + \frac{m}{n} \cos 2\theta \right) = 35721 \text{ cm/s}^2$$

$$A_Q^y = -\omega_2^2 R (1-m) \sin\theta = -33603 \text{ cm/s}^2$$



شكل 3–8

$A_Q = \sqrt{(A_Q^x)^2 + (A_Q^y)^2} = 49042 \text{ cm/s}^2$

$\beta_A = \tan^{-1} (A_Q^y / A_Q^x) = \tan^{-1} (33603/35721) = 43.2^o$

$\theta_A = -43.2^o = -43.2^o + 360 = 316.8^o$

وعند برمجة معادلات العجلة يمكن لحساب θ_A أن تستعمل المعادلة (1–15) لأن A_Q^x موجبة:

$\theta_A = \tan^{-1} (A_Q^y / A_Q^x) = \tan^{-1} (-33603/35721) = -43.2^o$

or $\theta_A = -43.2^o + 360 = 316.8^o$

3.1.3 السرعة والعجلة الزاوية لذراع التوصيل

يتم استنتاج السرعة الزاوية ω_3 والعجلة الزاوية α_3 لذراع التوصيل بإجراء عملية الاشتقاق (التفاضل) بالنسبة للزمن للمعادلة (1–3) مع ملاحظة أن $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, $\omega_3 = \frac{d\phi}{dt}$ فيمكن إثبات أن: [١]

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} \tag{3-14}$$

$$\alpha_3 = + \frac{\omega_2^2 \sin\theta \cos^2\theta}{(n^2 - \sin^2\theta)^{1.5}} - \frac{\omega_2^2 \sin\theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} + \frac{\alpha_2}{\omega_2}\omega_3 \tag{3-15}$$

مثال 4 – 3:

في الآلية المبينة في شكل 9–3 احسب السرعة الزاوية لذراع التوصيل مقدارا واتجاها عندما تكون $\theta = 50^o$ ، ثم أعد الحسابات لإيجاد منحني تغير هذه السرعة مع دوران ذراع الدوران crank دورة كاملة.

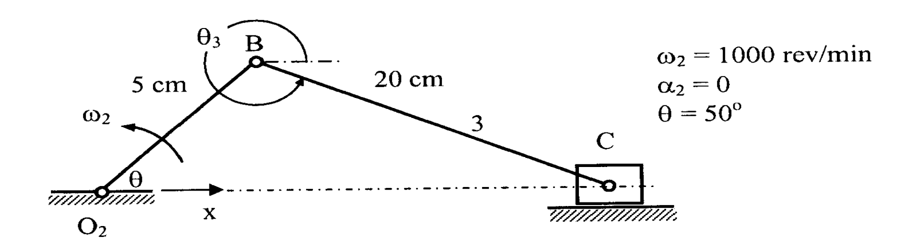
الحل:

بالتعويض نجد أن:

---

(١) انظر كتاب Martin صفحة 174 .

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}} = 104.72(1-\sin^2 50)^{0.5}/(4^2-\sin^2 50)^{0.5} = 17.15 \text{ rad/s}$$



شكل 9–3

والإشارة الموجبة للنتيجة تدل على أن الضلع 3 يدور عكس اتجاه عقرب الساعة. وهذه النتيجة خاطئة من حيث اتجاه الدوران لأن هذا الضلع في الحقيقة يدور مع اتجاه عقرب الساعة. والسبب في هذا الخطأ هو أن المعادلة مبنية على العلاقة $\omega_3 = \frac{d\phi}{dt}$ بينما نجد بالفحص الدقيق لكيفية تغير الزاوية ϕ أنه عند تغير θ من 0^o إلى 90^o فإن الزاوية ϕ تزيد (أي أن الضلع 3 يدور مع اتجاه عقرب الساعة) وفي هذه الحالة تكون العلاقة $\omega_3 = \frac{d\phi}{dt}$ غير صحيحة ، بل الصحيح هو أن $\omega_3 = -\frac{d\phi}{dt}$ وفي هذه الحالة يلزم وضع إشارة سالبة في المعادلة (14–3) . ولذلك يكون:

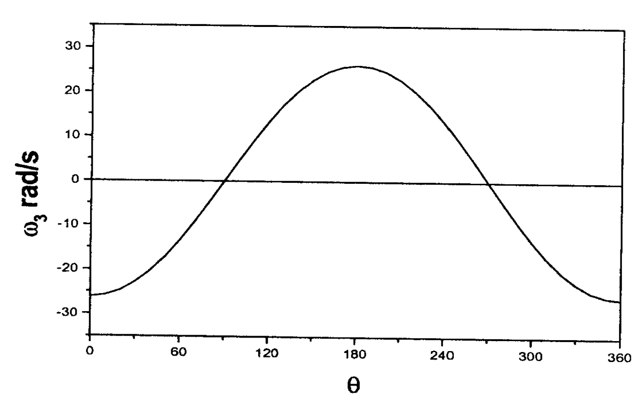
$$\left.\begin{aligned} \omega_3 &= -\omega_2 \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}} \quad \underline{\text{for}}\ 0^o < \theta < 90^o\ \underline{\text{and}}\ 180^o < \theta < 270^o \\ \omega_3 &= \omega_2 \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}} \quad \underline{\text{for}}\ 90^o \le \theta \le 180^o\ \underline{\text{and}}\ 270^o \le \theta \le 360^o \end{aligned}\right\} (3\text{–}16)$$

وبالتعويض في هذه المعادلة نوجد منحنى تغير السرعة مع دوران ذراع الدوران

crank دورة كاملة كما هو مبين في شكل 10–3. ومن الشكل يتضح أن أقصي سرعة زاوية لذراع التوصيل تكون عند الزوايا 180° , 0° أي عندما يكون المنـــزلق C عند مراكز السكون اللحظية dead centers .

وقد وردت معادلة أخرى[1] لحساب ω_3 وهي أبسط في الشكل وتصلح لجميع قيم θ وهي في الصورة :

$$\omega_3 = -\,\omega_2 \left(\frac{R\cos\theta}{L\cos\theta_3} \right) \qquad (3-17)$$



شكل 10–3

حيث θ_3 هي زاوية الضلع كما هو مبين في شكل 9–3 وهي تحسب من العلاقة

$$\theta_3 = \sin^{-1}\left(-\frac{R}{L}\sin\theta\right) \qquad (3-17)'$$

ويتم استنتاج العجلة الزاوية α_3 لذراع التوصيل بإجراء عملية الاشتقاق (التفاضل) بالنسبة للزمن للمعادلة (3–17) والتعويض من المعادلة '(3–17) :

$$\alpha_3 = \frac{\omega_2^2\, R\sin\theta + \omega_3^2\, L\sin\theta_3 - \alpha_2\, R\cos\theta}{L\cos\theta_3} \qquad (3-17)''$$

(١)انظر Mabie صفحة 359.

وربما يجد القارئ أن هذه المعادلة أسهل في الاستعمال من المعادلة (3-15).

مثال 5 – 3:

في الآلية المبينة في شكل 3-9 احسب عجلة ذراع التوصيل مقدارا واتجاها للزاوية المعطاة في الرسم ، ثم أعد الحسابات لإيجاد منحني تغير العجلة مع دوران ذراع الدوران crank دورة كاملة بسرعة منتظمة.

الحل:

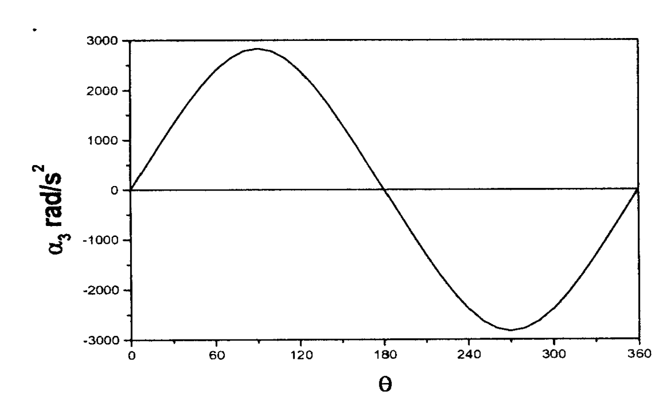
بالتعويض في المعادلة '(3-17) ثم في المعادلة "(3-17) نجد أن

$$\theta_3 = \sin^{-1}\ (-\ \frac{R}{L} \sin\theta\ ) = \sin^{-1}\ (-\ 5 \sin 50\ /\ 20) = 348.96^o$$

$$\alpha_3 = \frac{\omega_2^2\ R \sin\theta + \omega_3^2\ L \sin\theta_3 - \alpha_2\ R \cos\theta}{L \cos\theta_3}$$

$$= [(104.72)^2\ (5) \sin 50 + (-17.15)^2 (20) \sin 348.96]\ /\ (20 \cos 348.96)$$

$$= 2082.4\ rad/s^2$$



شكل 3-11

وبتكرار التعويض في المعادلة "(3-17) نوجد منحني تغير العجلة الزاوية مع دوران ذراع الدوران crank دورة كاملة كما هو مبين في شكل 3-11 . ومن الشكل يتضح أن أقصي عجلة لذراع التوصيل تكون عند الزوايا 90^o , 270^o بينما تكون

العجلة صفرا عندما يكون المنـــزلق C عند مراكز السكون اللحظية dead centers أي عند الزوايا 0^o , 180^o.

3.2 الآلية الرباعية Four Bar Linkage

هذه الآلية هي واحدة من أكثر الآليات شيوعا في التطبيقات العملية وقد تمت في الفصل الثاني مناقشة حركتها باستعمال الطرق البيانية. وفي هذا الفصل سنناقش كيفية تحليل الحركة والسرعة والعجلة حسابيا باستعمال العلاقات الهندسية.

3.2.1 تحليل موضع أضلاع الآلية الرباعية Position Analysis

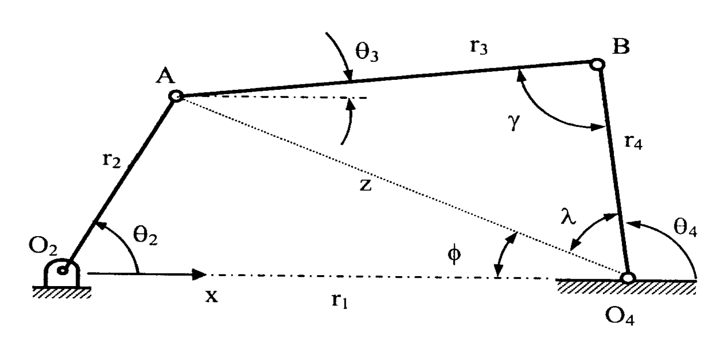
يوضح شكل 12–3 هذه الآلية (هي آلية crank–rocker التي نوقشت في الفصل الثاني) حيث الزاوية γ تسمى زاوية النقل transmission angle وهى إحدى وسائل الحكم على جودة تصميم الآلية وذلك لأن تشغيل الآلية بكفاءة يتطلب أن تـــكون قيمة هذه الزاوية كبيرة ، وعادة يعتبر تصميم الآلية مقبولا إذا كـــانت $\gamma > 40^o$. ويمكن حساب قيمة γ كما يلي:

من المثلث AO_2O_4 نجد أن

$$z^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\, r_1\, r_2 \cos \theta_2 \tag{3-18}$$

وأيضا من المثلث AO_4B نجد أن

$$z^2 = r_3^2 + r_4^2 - 2\, r_3\, r_4 \cos \gamma$$



شكل 12–3

أي أن

$$\gamma = \cos^{-1} [\frac{z^2 - r_3^2 - r_4^2}{-2 r_3 r_4}] \qquad (3-19)$$

وتكون أقصى قيمة للزاوية (أي γ_{max}) عند $\theta_2 = 180^o$. وتكون أقل قيمة للزاوية (أي γ_{min}) عند $\theta_2 = 0.0^o$.

ويمكن تعيين زاوية الضلع التابع (أي الزاوية θ_4) من العلاقة:

$$\theta_4 = 180 - (\lambda + \phi) \qquad (3-20)$$

حيث يمكن إيجاد الزوايا λ و ϕ من المثلثين AO_2O_4 و ABO_4 كما يلي:

$$\lambda = \cos^{-1} (\frac{z^2 + r_4^2 - r_3^2}{2 z \ r_4}) \qquad (3-21)$$

$$\phi = \cos^{-1} (\frac{z^2 + r_1^2 - r_2^2}{2 z \ r_1}) \qquad (3-22)$$

ويمكن تعيين زاوية ذراع التوصيل (أي الزاوية θ_3) من العلاقة:

$$\theta_3 = 180 - (\lambda + \phi + \gamma) = \theta_4 - \gamma \qquad (3-23)$$

وتقاس الزوايا θ_2 و θ_3 و θ_4 عكس عقرب الساعة (وهذا يعتبر الاتجاه الموجب) بدءا من الاتجاه الموجب لمحور x كما هو مبين في شكلي 3–12 , 3–13.

ومن المهم جدا مراعاة أن المعادلات السابقة تعتمد على حساب الدالة $\cos^{-1}$ والتي من الناحية الرياضية لها حلان أحدهما موجب والآخر سالب. ويجب اختيار الإشارات لكل من ϕ ,λ بحيث تتفق مع الوضع الحقيقي للآلية. والمثال التالي يوضح هذه الحقيقة.

مثال 6 – 3:

في الآلية المبينة في شكل 3–12 احسب زاوية النقل transmission angle وعين وضع كل من ذراع التوصيل والضلع التابع (أي الزوايا θ_4 , θ_3). الأبعاد هي r_1=7, r_2= 3, r_3= 8, r_4= 6 cm والزاوية $\theta_2 = 60^o$

الحل: بالتعويض في المعادلات (18–3), (19–3) نجد أن:

$$z^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\, r_1\, r_2 \cos\theta_2 = (7)^2 + (3)^2 - 2(7)(3)\cos 60^\circ = 37\ ;z = 6.083\ cm$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left[\frac{z^2 - r_3^2 - r_4^2}{-2\, r_3\, r_4}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{37 - 8^2 - 6^2}{-2\,(8)(6)}\right] = \pm\, 48.986^\circ$$

ووجود قيمتين للزاوية γ يدل على أن هناك حلين للمسألة ، أي أنه يمكن تجميع هذه الآلية بطريقتين أحدهما المبينة في شكل 12–3 ، والأخرى مبينة في شكل 13–3. وفي هذا الشكل الأخير تكون معادلة الزاوية $\bar{\gamma}$ هي:

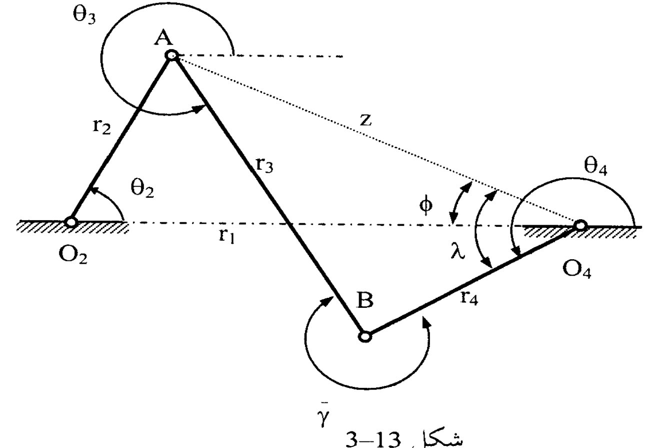
$$\bar{\gamma} = 360 - \gamma \qquad (3\text{–}24)$$

حيث γ هي القيمة الموجبة المحسوبة من المعادلة (19–3) وكذلك من هذا الشكل تكون معادلة θ_3 هي:

$$\theta_3 = 180 - (\lambda + \phi + \bar{\gamma}) = \theta_4 + \gamma \qquad (3\text{–}25)$$

وبالتعويض في المعادلات (21–3), (22–3) نجد أن:

$$\lambda = \cos^{-1}\left(\frac{z^2 + r_4^2 - r_3^2}{2\, z\, r_4}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{37 + 6^2 - 8^2}{2\sqrt{37}(6)}\right) = \pm 82.917^\circ$$



نتائج مثال 3-6
$\lambda = -82.92^\circ$
$\phi = 25.285^\circ$
$\bar{\gamma} = 311.014^\circ$

شكل 13–3

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z^2 + r_1^2 - r_2^2}{2\,z\,r_1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{37 + 7^2 - 3^2}{2\sqrt{37}(7)}\right) = \pm 25.285^\circ$$

ومن المهم توخي الحذر الشديد عند استعمال هذه النتائج ففي التركيبة الثانية للآلية ، شكل 13–3 ، فإن قيمة ϕ يجب أن تكون موجبة بينما يجب أن تكون λ سالبة، وعلى ذلك تكون θ_4 هي:

$$\theta_4 = 180 - (\lambda + \phi) = 180 - (-82.917 + 25.285) = 237.635^\circ$$

وتكون الزاوية θ_3 هي:

$$\theta_3 = \theta_4 + \gamma = 237.635 + 48.986 = 286.62^\circ$$

أما التركيبة الأولى للآلية ، شكل 12–3 ، فإن قيمة كل من λ , ϕ يجب أن تكون موجبة، وعلى ذلك تكون θ_4 هي:

$$\theta_4 = 180 - (\lambda + \phi) = 180 - (82.917 + 25.285) = 71.8^\circ$$

وتكون الزاوية θ_3 هي:

$$\theta_3 = \theta_4 - \gamma = 71.8 - 48.986 = 22.814^\circ$$

ويمكن تلخيص ما سبق في القواعد العامة التالية:

في التركيبة الأولى للآلية ، شكل 12–3 ، وهي عادة تسمى التركيبة المفتوحة ، تكون λ دائما موجبة ، وتحسب θ_3 من العلاقة: $\theta_3 = \theta_4 - \gamma$

أما التركيبة الثانية للآلية ، شكل 13–3 ، وهي عادة تسمى التركيبة المتقاطعة crossed وفيها تكون λ دائما سالبة ، وتحسب θ_3 من العلاقة: $\theta_3 = \theta_4 + \gamma$

أما ϕ ففي كلتا الحالتين تتبع القاعدة التالية: تكون ϕ موجبة في حالة $0^\circ \le \theta_2 \le 180^\circ$ وتكون ϕ سالبة في حالة $180^\circ \le \theta_2 \le 360^\circ$.

ويحتوي جدول 1–3 على برنامج كمبيوتر لتحليل النوعين ، (أي التركيبة المفتوحة والتركيبة المتقاطعة).

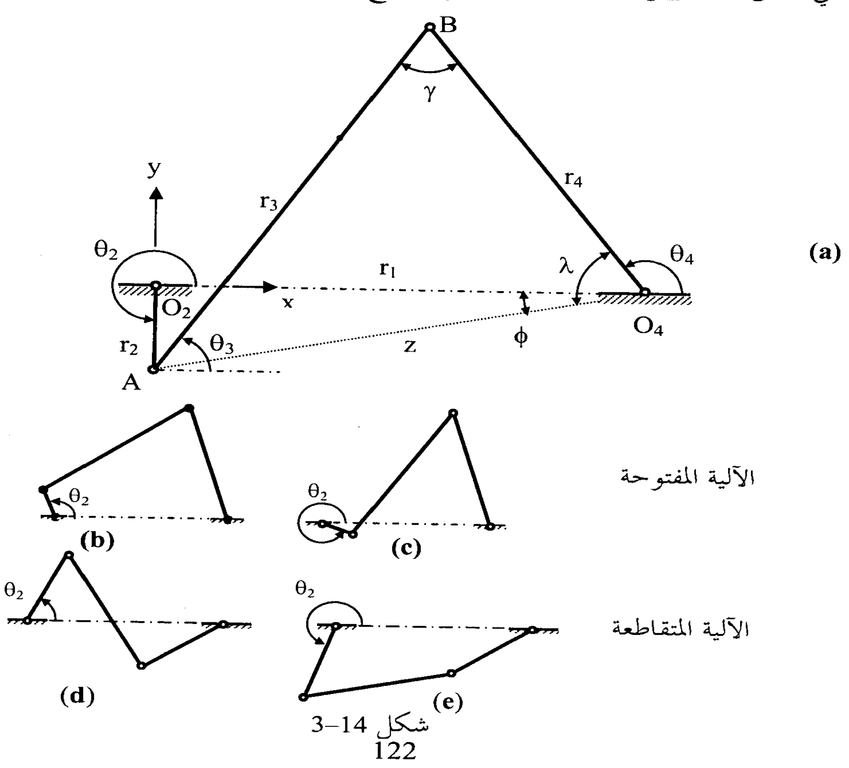
مثال 7 – 3:

في الآلية المبينة في شكل (a)14–3 احسب زاوية النقل transmission angle وكذلك زاوية الضلع التابع (أي الزاوية θ_4) وزاوية ذراع التوصيل (أي الزاوية θ_3) الأبعاد هي

r_1=200, r_2=40, r_3=200, r_4= 160 mm , θ_2=270°

الحل:

هذه الآلية تنطبق عليها معادلات النوع المفتوح على الرغم من أن الضلع الرابط AB (ذراع التوصيل) يتقاطع مع خط المراكز O_2O_4 في اللحظة المبينة في الشكل وذلك لأن معادلات الآلية المفتوحة صحيحة في المدى $0^o \leq \theta_2 \leq 360^o$ وشرط ذلك :
أولا ألا يتقاطع ذراع التوصيل AB مع خط المراكز O_2O_4 في المدى $0^o \leq \theta_2 \leq 180^o$
وثانيا أن يتقاطع ذراع التوصيل AB مع خط المراكز O_2O_4 في المدى $180^o \leq \theta_2 \leq 360^o$
كما هو مبين في شكل (c) , (b) 3–14 . والعكس صحيح في الآلية المتقاطعة crossed وشرطها : أولا أن يتقاطع ذراع التوصيل AB مع خط المراكز O_2O_4 في المدى $0^o \leq \theta_2 \leq 180^o$ وثانيا ألا يتقاطع ذراع التوصيل AB مع خط المراكز O_2O_4 في المدى $180^o \leq \theta_2 \leq 360^o$ ، كما هو موضح في شكل (e) , (d) 3–14 .



شكل 3–14

والجدول الآتي يبين النتائج (الزوايا بالدرجات) بتطبيق معادلات النوع المفتوح. ويحتوي جدول 1–3 على برنامج كمبيوتر مكتوب بلغة فورتران لحل هذا المثال مع مثال 10–3

θ_2	z, mm	ϕ	λ	γ	θ_4	θ_3
270	203.96	−11.31	65.37	67.98	125.94	57.96

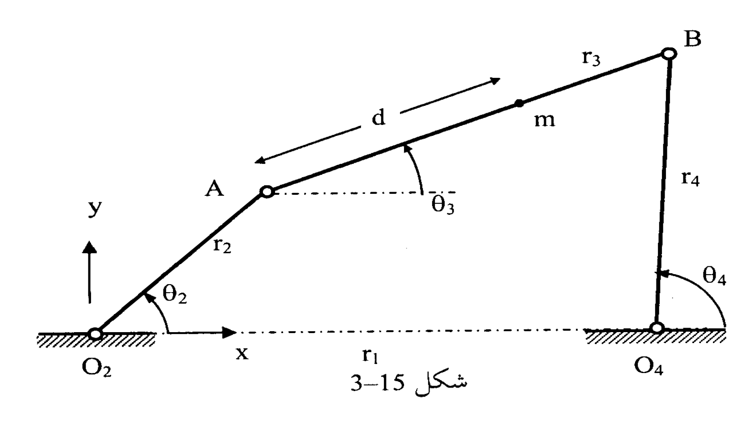
3.2.2 مسار نقطة على ذراع التوصيل

كما ذكر في الفصل الثاني فإن إحدى ميزات آلية الأربعة قضبان والتي ساهمت في سعة انتشارها على مر السنين هي أن النقط المختلفة على الضلع الرابط (ذراع التوصيل) coupler تتحرك على مسارات مختلفة مما يتيح استعمال مثل هذه الآلية البسيطة لأداء مهام تحتاج إلى مسارات معقدة. ويمكن حساب إحداثيات أي نقطة على ذراع التوصيل ، مثل نقطة m المبينة في شكل 15–3 ، كما يلي. بعد أن يتم اختيار المحورين المتعامدين x , y بحيث ينطبق المحور x على خط المراكز O_2O_4 يكون الإحداثي x_m في اتجاه المحور x هو:

$$x_m = r_2 \cos \theta_2 + d \cos \theta_3 \quad (3\text{–}26)$$

حيث المسافة d هي البعد Am . ويكون الإحداثي y_m في اتجاه المحور y هو:

$$y_m = r_2 \sin \theta_2 + d \sin \theta_3 \quad (3\text{–}27)$$



شكل 15–3

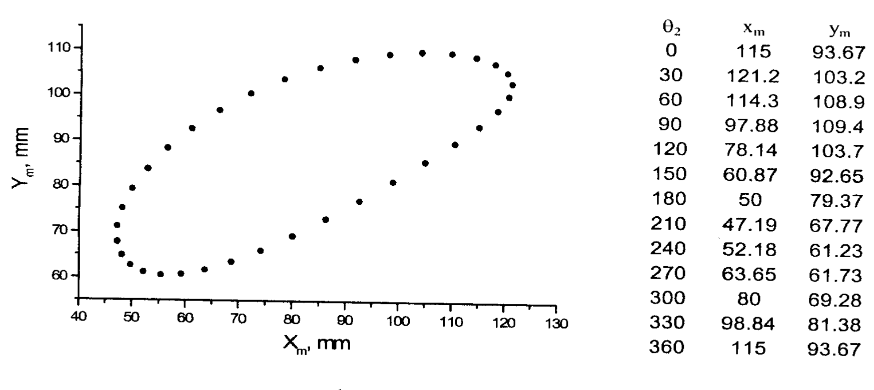
ويلاحظ أن إشارة d تكون موجبة إذا كانت النقطة m تقع على الضلع AB (أو امتداده) من جهة B ، أما النقط الواقعة على امتداد الضلع BA من جهة A فإن إشارة d لها تكون سالبة.

مثال 8 – 3:

في الآلية المبينة في شكل 3-14(a) ارسم مسار النقطة m على ذراع التوصيل بحيث إن المسافة Am = 80 mm .

الحل:

بالتعويض في المعادلات (3-26), (3-27) لقيم θ_2 من 0^o إلى 360^o كل 10^o نحصل على الإحداثيات الموقعة في شكل 3-16 . وفي الشكل نفسه جدول يبين قيم x_m و y_m المحسوبة بالمليمتر كل 30^o .



θ_2	x_m	y_m
0	115	93.67
30	121.2	103.2
60	114.3	108.9
90	97.88	109.4
120	78.14	103.7
150	60.87	92.65
180	50	79.37
210	47.19	67.77
240	52.18	61.23
270	63.65	61.73
300	80	69.28
330	98.84	81.38
360	115	93.67

شكل 3-16

مثال 9 – 3:

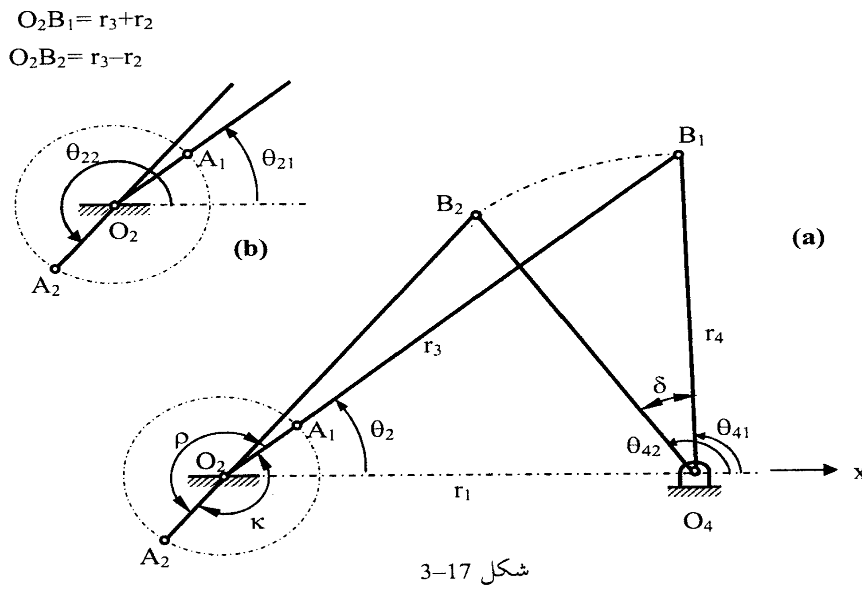
في الآلية المبينة في شكل 3-14(a) عين مراكز السكون اللحظية dead centers ومدى ذبذبة الضلع التابع (أي ضلع رقم 4) range of oscillation of the follower وكذلك نسبة الزمن time ratio. الأبعاد هي r_1=200, r_2=40, r_3=200, r_4= 160 mm

الحل:

شكل 3–17(a) يبين مراكز السكون للضلع 4 : الأول O_4B_1 وهو مركز السكون الأبعد وفيه يكون الضلع 4 أبعد ما يمكن من مركز الدوران O_2 والآلية في هذه الحالة تكون في الوضع $O_2A_1B_1O_4$ ، والثاني O_4B_2 وهو مركز السكون الأدنى وفيه يكون الضلع 4 أقرب ما يمكن من مركز الدوران O_2 والآلية في هذه الحالة تكون في الوضع $O_2A_2B_2O_4$. ومن الشكل يتبين أن:

$O_2B_1 = r_3 + r_2$

$O_2B_2 = r_3 - r_2$



شكل 3–17

ويمكن حساب الزاوية θ_{41} (وهي زاوية الضلع 4 في مركز السكون الأبعد) من المثلث $O_2B_1O_4$ والعلاقة

$$(r_3 + r_2)^2 = r_1^2 + r_4^2 - 2\, r_1\, r_4 \cos(180 - \theta_{41})$$

ومنها

$$\theta_{41} = \cos^{-1}\left(\frac{(r_3 + r_2)^2 - r_1^2 - r_4^2}{2\, r_1\, r_4}\right) \qquad (3\text{–}28a)$$

كما يمكن حساب الزاوية θ_{21} (وهي زاوية الضلع 2 في مركز السكون الأبعد) من العلاقة:

$$\theta_{21} = \cos^{-1} \left(\frac{r_4^2 - (r_3 + r_2)^2 - r_1^2}{-2\, r_1 (r_3 + r_2)} \right) \qquad (3\text{–}28b)$$

وبالمثل يمكن حساب الزاوية θ_{42} (وهي زاوية الضلع 4 في مركز السكون الأدنى) من المثلث $O_2B_2O_4$ والعلاقة:

$$\theta_{42} = \cos^{-1} \left(\frac{(r_3 - r_2)^2 - r_1^2 - r_4^2}{2\, r_1 r_4} \right) \qquad (3\text{–}29)$$

وكذلك يمكن حساب الزاوية θ_{22} وهي زاوية الضلع 2 في مركز السكون الأدنى (أي الزاوية من محور x إلى A_2O_2 مقاسة عكس عقرب الساعة ، شكل (3–17(b)) من العلاقة:

$$\theta_{22} = \cos^{-1} \left(\frac{r_4^2 - (r_3 + r_2)^2 - r_1^2}{-2\, r_1 (r_3 - r_2)} \right) + 180 \qquad (3\text{–}30)$$

ويكون مدى ذبذبة الضلع التابع (أي الضلع 4) range of oscillation of the follower هو الزاوية δ التي يمكن حسابها من العلاقة:

$$\delta = \theta_{42} - \theta_{41} \qquad (3\text{–}31)$$

ويمكن حساب نسبة الزمن time ratio (T) وهي النسبة بين (زمن دوران الضلع 4 عكس عقرب الساعة من B_1 إلى B_2) وبين (زمن دوران الضلع 4 عكس عقرب الساعة من B_2 إلى B_1) من العلاقة:

$$T = \frac{\rho}{\kappa}\ ;\ \rho = \theta_{22} - \theta_{21}\ ;\ \kappa = 360 - \rho \qquad (3\text{–}32)$$

بالتعويض في المعادلات السابقة نحصل على النتائج المبينة بالجدول التالي (الزوايا بالدرجات).

θ_{41}	θ_{42}	δ	θ_{21}	θ_{22}	ρ	κ	T
97.181	128.7	31.5	41.41	231.3	189.91	170.09	1.117

3.2.3 تحليل السرعة والعجلة في الآلية

تحليل السرعة في هذه الآلية يعنى إيجاد السرعة الزاوية لكل من الضلعين 4,3 (أي إيجاد ω_3 و ω_4) إذا علمت السرعة الزاوية للذراع الدوار ω_2. ومن حيث المبدأ فإنه يمكن تحقيق ذلك عن طريق إجراء عملية التفاضل بالنسبة للزمن لمعادلة كل من θ_3 ، θ_4 ، أي معادلات (3-23), (3-20) . وبالمثل تحليل العجلة يعنى إيجاد العجلة الزاوية لكل من الضلعين 4,3 (أي إيجاد α_3 , α_4) إذا علمت العجلة الزاوية للذراع الدوار α_2 مع سرعته الزاوية ω_2. ومن حيث المبدأ فإنه يمكن تحقيق ذلك أيضا عن طريق إجراء عملية التفاضل بالنسبة للزمن لكل من ω_3 , ω_4 الناتجة من عمليتي التفاضل السابقتين ولكن في الواقع أن هذه الطريقة صعبة نظرا لضرورة إجراء عملية التفاضل للدالة $\cos^{-1}$ في المعادلات السابقة. ولذلك من الأسهل اتباع طريقة الدائرة المقفلة كما يلي (ويجدر بالذكر أن هذه الطريقة شبيهة بطريقة الأعداد المركبة التي ستشرح بالتفصيل في الفصل الرابع). بالرجوع إلى شكل 3-15 فإنه يمكن إسقاط أطوال أضلاع الآلية الأربعة على محوري x , y (لاحظ أن محور x ينطبق على خط المراكز O_2O_4 وهو ليس بالضرورة أفقيا، وأن المحور y عمودي على المحور x). فتكون المركبات في اتجاه محور x للآلية المبينة في شكل 3-15 هي:

$$r_1 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_4 \cos \theta_4 \quad \text{(a)}$$

وتكون المركبات في اتجاه محور y هي:

$$r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 = 0.0 \quad \text{(b)}$$

وبإجراء عملية التفاضل بالنسبة للزمن لكل من هاتين المعادلتين وملاحظة أن $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ نحصل على:

$$-\omega_2 r_2 \sin \theta_2 - \omega_3 r_3 \sin \theta_3 + \omega_4 r_4 \sin \theta_4 = 0.0 \quad \text{(c)}$$

$$\omega_2 r_2 \cos \theta_2 + \omega_3 r_3 \cos \theta_3 - \omega_4 r_4 \cos \theta_4 = 0.0 \quad \text{(d)}$$

وبحل هاتين المعادلتين آنيا نحصل على السرعات الزاوية للأضلاع 3,4 كما يلي.

$$\omega_3 = \frac{r_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \omega_2 \quad (3-33)$$

$$\omega_4 = \frac{r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \omega_2 \qquad (3\text{–}34)$$

وبإجراء عملية التفاضل بالنسبة للزمن لكل من هاتين المعادلتين وملاحظة أن العجلة الزاوية $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

نحصل على العجلات الزاوية للأضلاع 3,4 كما يلي:

$$\alpha_3 = \frac{r_2\, \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3\, \omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) - r_4\, \omega_4^2}{r_3 \sin(\theta_4 - \theta_3)} + \frac{\omega_3}{\omega_2} \alpha_2 \qquad (3\text{–}35)$$

$$\alpha_4 = -\frac{r_2\, \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + r_3\, \omega_3^2 - r_4\, \omega_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} + \frac{\omega_4}{\omega_2} \alpha_2 \qquad (3\text{–}36)$$

مثال 10 – 3:

في الآلية المبينة في شكل (a)14–3 احسب السرعة الزاوية والعجلة الزاوية لكل من الضلعين 3 , 4. الأبعاد هي $r_1=200,\ r_2=40,\ r_3=200,\ r_4=160$ mm والزاوية $\theta_2=270^\circ$ وسرعة وعجلة الذراع الدوار O_2A هما $\omega_2=1$ rad/s, $\alpha_2=1$ rad/s^2.

الحل:

بالتعويض في المعادلات (20–3) حتى (23–3) نحصل على θ_3 , θ_4 كما في مثال 7 – 3 ، ثم بالتعويض في المعادلات (33–3) حتى (36–3) نحصل على النتائج المبينة بالجدول التالي. ويحتوي جدول 1–3 على برنامج كمبيوتر مكتوب بلغة فورتران لحل هذا المثال مع مثال 7–3 . (الزوايا بالدرجات ووحدات ω هي rad/s أما وحدات α فهي rad/s^2).

θ_2	θ_3	θ_4	ω_3	ω_4	α_3	α_4
270	57.96	125.94	0.127	–0.143	–0.059	–0.358

والإشارة السالبة تعني في اتجاه عقرب الساعة.

جدول 1-3

برنامج لحساب الزوايا والسرعة والعجلة الزاوية لآلية الأربعة أضلاع باستعمال لغة الفورتران

للآلية المفتوحة ضع op_cros=1 وللآلية المتقاطعة ضع op_cros=0

```
c Program to Calculate the angles, velocity and acceleration of the a 4 bar linkage
c
    Real Lampda
   OPEN(6,FILE='4bar.OUT',STATUS='unknown')

c -------------------------   Input   ------------------
c    the variable op_cros=1 for Open Loop Linkage
c         for crossed linkage,   op_cros takes any other value

    r1=24.04
    r2=8
    r3=16
    r4=8
    th2=15
    w2=20
    a2=0
    op_cros = 0
    if( op_cros .EQ. 1) write(6,*) ' Open Loop Linkage'
    if( op_cros .NE. 1) write(6,*) ' Crossed Linkage'
    Write(6,*) 'r1,r2,r3,r4'
    Write(6,99) r1,r2,r3,r4
c ------------------------------------------------------
    pi= 4*atan(1)
    D2R=pi/180

   Write(6,*) 'th2,th3,th4,gamma,w3,w4,a3,a4'

    th2=th2*D2R

         z=(r1**2 + r2**2 - 2*r1*r2*cos(th2))**0.5
         g = acos( (z**2 - r3**2 - r4**2)/(-2 * r3 * r4) )

         Lampda = acos(  (z**2 - r3**2 + r4**2)/(2 * z * r4) )
         if( op_cros .NE. 1)    Lampda = - Lampda

         phi =  acos(  (z**2 - r2**2 + r1**2)/(2 * z * r1) )
         if( th2 .GT. pi  .and.  th2 .LT. 2*pi)    phi = - phi

         th4 = pi - (Lampda+phi)
```

```
          if( op_cros .EQ. 1) th3 = th4 - g
          if( op_cros .NE. 1) th3 = th4 + g

c       calculation of angular velocities
      w3 = ( (r2 * sin(th2-th4)) / (r3 * sin(th4-th3)) ) *w2
      w4 = ( (r2 * sin(th2-th3)) / (r4 * sin(th4-th3)) ) *w2

c       calculation of angular accelerations
      a3 = (  (r2 *w2**2 *cos(th2-th4)+r3*w3**2*cos(th3-th4) - r4*w4**2)
     &    / (r3 * sin(th4-th3))  ) +w3*a2/w2

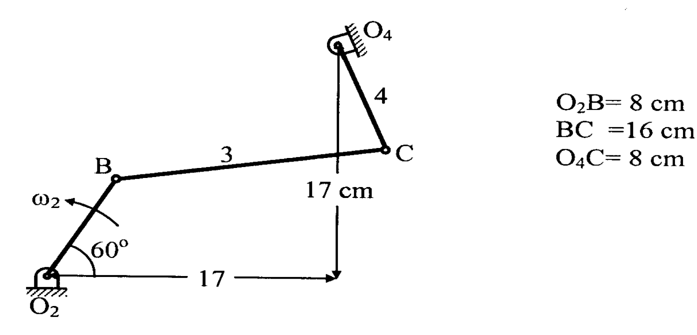
      a4 =-(  (r2 *w2**2 *cos(th2-th3)+r3*w3**2 - r4*w4**2*cos(th3-th4))
     &    / (r4 * sin(th3-th4))  ) +w4*a2/w2

         th2=th2/D2R
         th3=th3/D2R
         th4=th4/D2R
         g = g/D2R
         Write(6,99) th2,th3,th4,g ,w3,w4,a3,a4

99    format(4(f6.2,1x) , 4(f9.3,1x) )
      end
```

مثال 11 – 3:

للآلية الرباعية المبينة في شكل 18–3 احسب السرعة الزاوية والعجلة الزاوية لكل من الضلعين 3 , 4 في الوضع المبين علما بأن سرعة الذراع الدوار منتظمة ومقدارها $\omega_2 = 20$ rad/s.

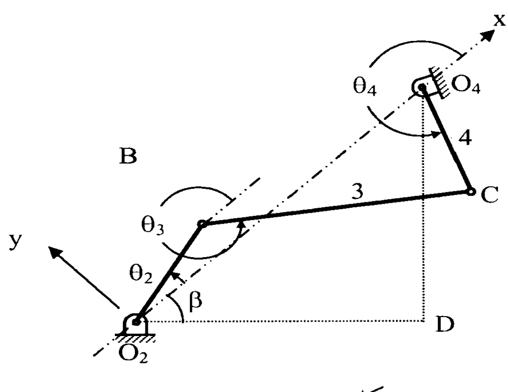


شكل 18–3

الحل:

كي يتسنى لنا استعمال المعادلات المستنتجة فيما سبق يجب أخذ المحور x منطبقا على خط المراكز O_2O_4 وتقاس منه جميع الزوايا. ومن المثلث DO_2O_4 في شكل 19-3 يمكن حساب $\beta = 45^o$ ولذلك تكون الزاوية $\theta_2=15^o$ ويكون الطول O_2O_4 مساويا:

$r_1 = O_2O_4 = 17/\cos\beta = 24.04$ cm



شكل 19-3

تقاطع الضلع الرابط coupler 3 مع خط المراكز O_2O_4 يحدث في حـــالة $0^o \leq \theta_2 \leq 180^o$ ولذلك تنطبق عليها معادلات النوع المتقاطع والجدول الآتي يبين نتائج استعمال برنامج الكمبيوتر لإيجاد الزوايا والسرعات والعجلات الزاوية (الزوايا بالدرجات ووحدات ω هي rad/s أما وحدات α فهي rad/s^2).

θ_2	θ_3	θ_4	ω_3	ω_4	α_3	α_4
15	324.26	245.42	−7.856	−15.78	244.68	−334.68

3.2.4 تحليل حركة أي نقطة على ذراع التوصيل

يمكن حساب إحداثيات أي نقطة على ذراع التوصيل ، مثل النقطة P المبينة في شكل 20–3 ، بالتعويض في المعادلات (26–3) و (27–3). ويلاحظ أن ذراع التوصيل لا يلزم أن يكون مستقيما على الخط AB ، وإنما يمكن أن يأخذ أي شكل ليشمل نقاطا أخرى مثل النقطةQبدون تأثير على الحركة طالما أن المسافة بين الوصلتين A,B تظل ثابتة أثناء الحركة. وهذه الخاصية مفيدة جدا في الحصول على مسارات مختلفة مما يتيح استعمال مثل هذه الآلية البسيطة لأداء مهام تحتاج إلى مسارات معقدة. ويمكن حساب إحداثيات أي نقطة على ذراع التوصيل، مثل النقطة Q المبينة في شكل 3–20(a) (وهي مثبتة في ذراع التوصيل بوصلة جامدة عند النقطة P) ،كما يلي.

بعد أن يتم اختيار المحورين المتعامدين x,y بحيث ينطبق المحور x على خط المراكز O_2O_4 ، يكون الإحداثي x_Q في اتجاه المحور x هو:

$$x_Q = r_2 \cos \theta_2 + d \cos \theta_3 - h \sin \theta_3 \qquad (3\text{–}37)$$

حيث المسافة d هي البعد AP والمسافة h هي البعد QP. ويكون الإحداثي y_Q في اتجاه المحور y هو:

$$y_Q = r_2 \sin \theta_2 + d \sin \theta_3 + h \cos \theta_3 \qquad (3\text{–}38)$$

ومن المهم مراعاة إشارة كل من d و h فإنهما موجبتان بالنسبة إلى النقطة Q المبينة في شكل 3–20(a) ، وذلك لأن المعادلتين السابقتين مبنيتان على أن أساس إحداثيات النقطة Q منسوبة إلى محورين متعامدين محليين local axes هما (s, u) يبدآن عند النقطة A بحيث يكون الاتجاه الموجب لهما في اتجاه الخط AB وعمودي عليه كما هو موضح في شكل 3–20(b) . أما بالنسبة إلى النقطة C المبينة في الشكل فإن قيمة d لها تساوي +8 cm وقيمة h لها تساوي –4 cm . و بالنسبة إلى النقطة E المبينة في الشكل فإن قيمة d لها تساوي – 3.3 cm وقيمة h لها تساوي +3 cm

ولحساب سرعة النقطة Q تجرى عملية التفاضل بالنسبة للزمن لكل من المعادلتين (3–37) و (3–38) فنحصل على:

$$V_Q^x = - r_2\, \omega_2 \sin \theta_2 - \omega_3 (d \sin \theta_3 + h \cos \theta_3) \qquad (3\text{–}39)$$

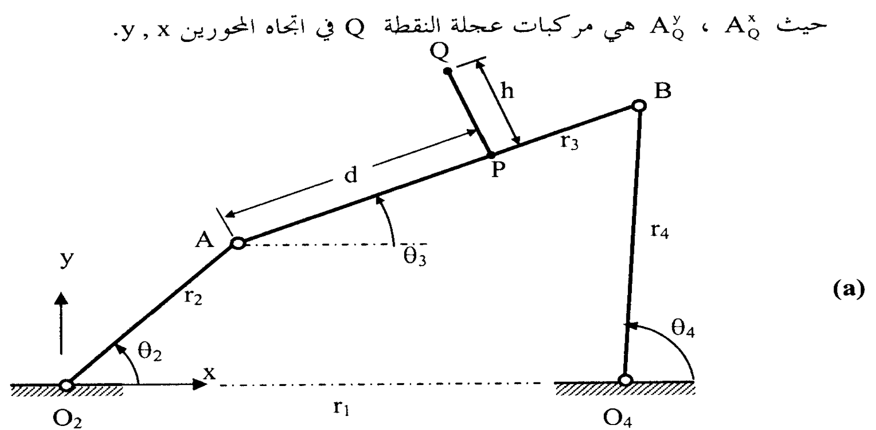
$$V_Q^y = r_2\, \omega_2 \cos \theta_2 + \omega_3 (d \cos \theta_3 - h \sin \theta_3) \qquad (3\text{–}40)$$

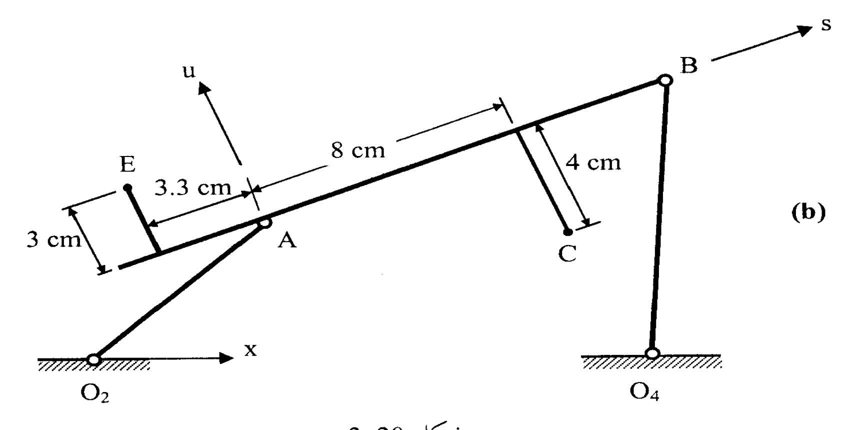
حيث V_Q^x ، V_Q^y هي مركبات سرعة النقطة Q في اتجاه المحورين x , y. وبإجراء عملية التفاضل مرة أخرى بالنسبة للزمن لكل من هاتين المعادلتين نحصل على:

$$A_Q^x = -r_2(\alpha_2 \sin\theta_2 + \omega_2^2 \cos\theta_2) - \alpha_3(d \sin\theta_3 + h \cos\theta_3) - \omega_3^2(d \cos\theta_3 - h \sin\theta_3) \quad (3-41)$$

$$A_Q^y = r_2(\alpha_2 \cos\theta_2 - \omega_2^2 \sin\theta_2) + \alpha_3(d \cos\theta_3 - h \sin\theta_3) - \omega_3^2(d \sin\theta_3 + h \cos\theta_3) \quad (3-42)$$

حيث A_Q^x ، A_Q^y هي مركبات عجلة النقطة Q في اتجاه المحورين x , y.



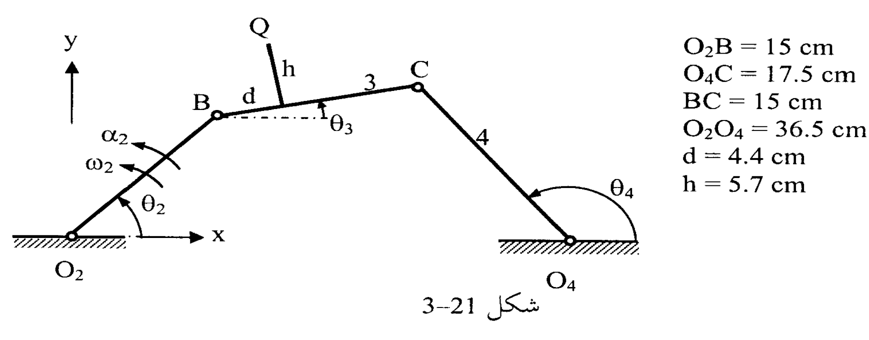


شكل 3-20

مثال 3–12

في الآلية المبينة في شكل 3–21 احسب السرعات والعجلات الزاوية للأضلاع 3 , 4 ثم عين إحداثيات النقطة Q واحسب سرعة وعجلة هذه النقطة مقدارا واتجاها عندما تكون $\theta_2 = 45^o$ ، علما بأن ذراع الدوران يدور عكس اتجاه عقرب الساعة بسرعة $\omega_2 = 3$ rad/s ، وعجلة زاوية هي $\alpha_2 = 10$ rad/s^2 عكس اتجاه عقرب الساعة.

الحل:



$O_2B = 15$ cm
$O_4C = 17.5$ cm
$BC = 15$ cm
$O_2O_4 = 36.5$ cm
$d = 4.4$ cm
$h = 5.7$ cm

شكل 3–21

هذه الآلية تنطبق عليها معادلات النوع المفتوح والجدول الآتي يبين نتائج استعمال برنامج الكمبيوتر لإيجاد الزوايا والسرعات والعجلات الزاوية (الزوايا بالدرجات ووحدات ω هي rad/s أما وحدات α فهي rad/s^2).

θ_2	θ_3	θ_4	ω_3	ω_4	α_3	α_4
45	11.01	129.66	–3.4	1.64	–20.29	25.53

وباستعمال هذه النتائج مع معطيات هذا المثال وهي $d = 4.4$ cm , $h = 5.7$ cm والتعويض في المعادلتين (3–37) , (3–38) نجد أن إحداثيات النقطة Q هما

$$x_Q = R\ \cos\theta_2 + d\ \cos\theta_3 - h\ \sin\theta_3 = 13.84 \text{ cm}$$

$$y_Q = R\ \sin\theta_2 + d\ \sin\theta_3 + h\ \cos\theta_3 = 17.04 \text{ cm}$$

وبالتعويض في المعادلتين (3–39) , (3–40) نجد أن مركبتي سرعة النقطة Q هما

$$V_Q^x = -\omega_2 R \sin\theta_2 - \omega_3 (d \sin\theta_3 + h \cos\theta_3) = -9.92 \text{ cm/s}$$

$$V_Q^y = \omega_2 R \cos\theta_2 + \omega_3 (d \cos\theta_3 - h \sin\theta_3) = 20.83 \text{ cm/s}$$

فيكون مقدار سرعة النقطة Q هو:

$$V_Q = \sqrt{(V_Q^x)^2 + (V_Q^y)^2} = 23.06 \text{ cm/s}$$

ويكون اتجاه سرعة النقطة Q هو:

$$\theta_V = \tan^{-1} (V_Q^y / V_Q^x) = \tan^{-1} [20.83 /(-9.92)] + 180^o = 115.5^o$$

وقد أضيف المقدار 180^o لأن V_Q^x سالبة. وبالتعويض في المعادلتين , (3–42) (3–41) نجد أن مركبتي عجلة النقطة Q هما:

$$A_Q^x = -108.4 \text{ cm/s}^2 \qquad , \; A_Q^y = -129.5 \text{ cm/s}^2$$

ويكون مقدار عجلة النقطة Q هو:

$$A_Q = \sqrt{(A_Q^x)^2 + (A_Q^y)^2} = 168.86 \text{ cm/s}$$

ويكون اتجاه عجلة النقطة Q هو:

$$\theta_A = \tan^{-1} (A_Q^y / A_Q^x) = \tan^{-1} [(-129.5) / (-108.4)] + 180^o = 230.07^o$$

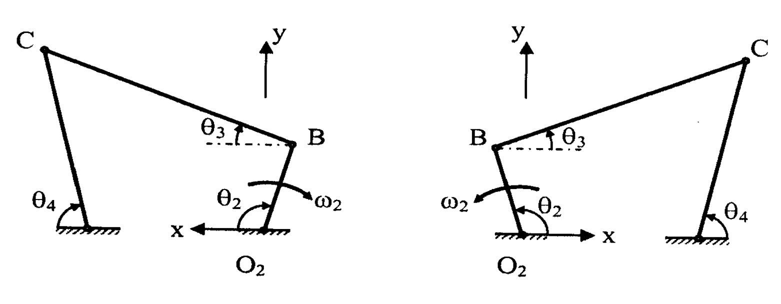
وقد أضيف المقدار 180^o لأن A_Q^x سالبة.

3.2.5 ملاحظات على نظام المحاور

جميع العلاقات التي تم استنتاجها فيما سبق من هذا الفصل ، سواء لآلية المنـــزلق أو الآلية الرباعية ، اعتمدت على اختيار ثلاثة محاور متعامدة (x , y , z) أي Cartesian axes حيث الاتجاه الموجب للمحور x جهة اليمين والاتجاه الموجب للمحور y لأعلى والاتجاه الموجب للمحور z عمودي على مستوى الرسم ومتجه ناحية القارئ. وهذا النظام للمحاور يظهر منه المحوران y , x في شكلي , 3–21 3–20 مثلا وهو يتبع قاعدة اليد اليمنى ولهذا تكون الزوايا الموجبة عكس عقارب الساعة. وطبقا لقاعدة اليد اليمنى فإنه إذا تخيلنا وجود عمود مسنن عمودي على مستوى الرسم ومتجه ناحية القارئ (أي منطبق على المحور z) وأدرنا صامولة على

هذا العمود عكس عقرب الساعة فإنها تتقدم على العمود المسنن ناحية القارئ . ونظام اليد اليمنى هذا هو المستعمل في معظم الأعمدة المسننة ومسامير البريمة (البراغي) . وقد بين شكل 19–3 أن المحور x لا يلزم أن يكون أفقيا ، وأن المعادلات صحيحة طالما أن المحاور الثلاثة متعامدة وتتبع قاعدة اليد اليمنى.

على أن هناك حالات يكون من الأسهل فيها استعمال محاور ثلاثة متعامدة ولكن تتبع قاعدة اليد اليسرى كما هو موضح في شكل 22– 3 الذي يقارن النظامين. ويتبين من الشكل أنه في نظام اليد اليسرى يظل المحور z عموديا على مستوى الرسم ومتجها ناحية القارئ ، ولكن ترتيب المحورين y , x يتغير بحيث يصبح قياس الزوايا الموجبة يكون في اتجاه دوران عقرب الساعة وليس عكسها كما هو الحال في نظام اليد اليمنى. وفي حالة ما إذا كان العمود المسنن السابق ذكره يتبع نظام اليد اليسرى فإنه يلزم إدارة الصامولة على هذا العمود في اتجاه عقرب الساعة كي تتقدم على العمود المسنن ناحية القارئ.



محاور متعامدة وتتبع قاعدة اليد اليسرى **(b)**   محاور متعامدة وتتبع قاعدة اليد اليمنى **(a)**

شكل 22–3

ويمكن من شكل (b)22–3 إدراك أن نظام اليد اليسرى هو صورة في المرآة لنظام اليد اليمنى الموضح في شكل (a)22–3 ، بحيث إنه عندما يكون المحور y رأسيا لأعلى يكون الاتجاه الموجب للمحور x ناحية اليسار في نظام اليد اليسرى. ويلزم التأكيد

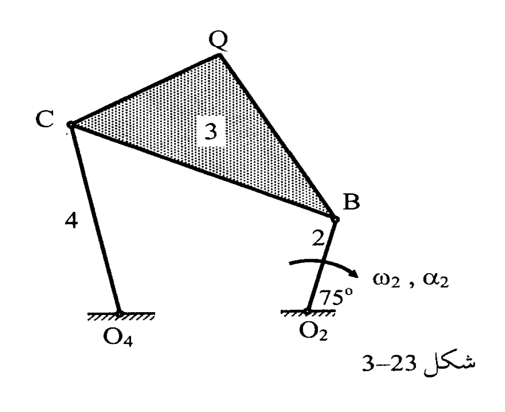
هنا أن جميع المعادلات التي تستنتج باستعمال أي من النظامين تنطبق على النظامين معا.

وتجدر الإشارة إلى أن استعمال نظام اليد اليسرى لحـــل الآلية المبينة في شكـــل 3–22(b) مثلا هو اختيار طبيعي ولكنه ليس حتميا ، بمعنى أنه يمكن أيضا استعمال نظام اليد اليمنى أيضا ولكن في هذه الحالة يكون اتجاه المحور y رأسيا لأسفل وتقاس الزوايا الموجبة كلها عكس عقرب الساعة ويتغير نوع الآلية من المفتوح إلى المتقاطع كما يوضح ذلك المثال التالي.

مثال 3–13

في الآلية المبينة في شكل3–23 احسب السرعات والعجلات الزاوية للأضلاع3 , 4 ثم عين إحداثيات النقطة Q واحسب سرعة وعجلة هذه النقطة مقدارا واتجاها ، علما بأن الذراع O_2B يدور مع عقرب الساعة بسرعة زاوية $\omega_2 = 40$ rad/s ، وعجلة زاوية مقدارها $\alpha_2 = 10$ rad/s^2. استعمل نظام محاور تتبع قاعدة اليد اليسرى ، ثم أعد الحل باستعمال نظام محاور تتبع قاعدة اليد اليمنى وقارن نتائج الحلين.

الحل:



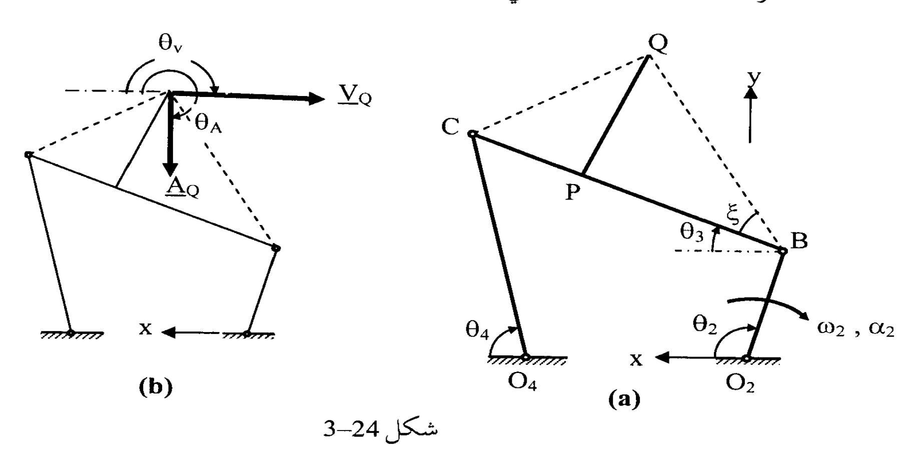
$O_2B = 40$ mm
$BC = 100$ mm
$O_4C = 80$ mm
$O_2O_4 = 66$ mm
$BQ = 80$ mm
$CQ = 60$ mm

شكل 3–23

الضلع O_2B هو الذراع الدوار لأن سرعته وعجلته معلومتان ولذلك تكون نقطة الأصل هي O_2 ويكون المحور x في اتجاه خط المراكز O_2O_4 أي ناحية اليسار. فإذا

احتفظنا باتجاه المحور y إلى أعلى فإننا بذلك نكون قد اخترنا نظام محاور اليد اليسرى ، انظر شكل (a) 24–3. وبناء على ذلك تكون الزاوية θ_2 هي المعرفة بالشكل مقاسة في اتجاه عقرب الساعة وقيمتها 105^o ، وتكون الآلية من النوع المفتوح. لاحظ أن إشارة كل من ω_2 و α_2 موجبة لأنهما في اتجاه عقرب الساعة وهو الاتجاه الموجب في نظام محاور اليد اليسرى.

بالتعويض في المعادلات (20–3) حتى (23–3) نحصل على θ_4 , θ_3 ، ثم بالتعويض في المعادلات (33–3) حتى (36–3) نحصل على السرعات والعجلات الزاوية للأضلاع 3 , 4. وكحل بديل يمكن استخدام برنامج الكمبيوتر المبين في جدول 1–3 لحل هذا المثال. والمعطيات input data هي:



شكل 24–3

$r_1 = 66$ mm , $r_2 = 40$, $r_3 = 100$, $r_4 = 80$, $\theta_2 = 105^\circ$, $\omega_2 = 40$ rad/s , $\alpha_2 = 10$ rad/s^2

والجدول الآتي يبين الزوايا والسرعات والعجلات الزاوية (الزوايا بالدرجات ووحدات ω هي rad/s أما وحدات α فهي rad/s^2). لاحظ أن الإشارات الموجبة تعني أن الاتجاه هو مع عقرب الساعة.

θ_2	θ_3	θ_4	ω_3	ω_4	α_3	α_4
105	23.5	78.94	8.54	24.02	189.97	–137.27

ولإيجاد إحداثيات وسرعة وعجلة النقطة Q يجب حساب المسافة d = BP وكذلك المسافة h = QP ، وذلك يتم باستعمال الأطوال المعلومة لأضلاع المثلث BCQ مع قواعد الهندسة المستوية البسيطة للوصول إلى العلاقات والنتائج التالية:

$$\xi = \cos^{-1}\left(-\frac{(CQ)^2-(BQ)^2-(CB)^2}{2(BQ)(CB)}\right) = 36.87^o$$

$$d = BP = (BQ)\cos\xi = 64 \text{ mm}$$

$$h = QP = (BQ)\sin\xi = 48 \text{ mm}$$

وباستعمال هذه النتائج والتعويض في المعادلتين (3–37) , (3–38) نجد أن إحداثيات النقطة Q هي:

$$x_Q = 29.1 \text{ mm},\ \ y_Q = 108.18 \text{ mm}$$

والإشارة الموجبة للإحداثي x_Q تدل على أنها ناحية اليسار من O_2.

وبالتعويض في المعادلتين (3–39) , (3–40) نجد أن مركبتي سرعة النقطة Q هما

$$V_Q^x = -\omega_2 R\sin\theta_2 - \omega_3(d\sin\theta_3 + h\cos\theta_3) = -2139.1 \text{ mm/s}$$

$$V_Q^y = \omega_2 R\cos\theta_2 + \omega_3(d\cos\theta_3 - h\sin\theta_3) = -76.46 \text{ mm/s}$$

فيكون مقدار سرعة النقطة Q هو:

$$V_Q = \sqrt{(V_Q^x)^2 + (V_Q^y)^2} = 2140.5 \text{ mm/s}$$

ويكون اتجاه سرعة النقطة Q هو:

$$\theta_V = \tan^{-1}(V_Q^y / V_Q^x) = \tan^{-1}[(-76.46)/(-2139.1)] + 180^o = 182.05^o$$

وقد أضيف المقدار 180^o لأن V_Q^x سالبة. ويبين شكل 3–24(b) الزاوية θ_V وهي مقاسة في اتجاه عقرب الساعة من الاتجاه الموجب لمحور x وهو ناحية اليسار.

وبالتعويض في المعادلتين (3–41) , (3–42) نجد أن مركبتي عجلة النقطة Q هما

$$A_Q^x = 84.9 \text{ mm/s}^2,\ \ A_Q^y = -59477.1 \text{ mm/s}^2$$

ويكون مقدار عجلة النقطة Q هو:

$$A_Q = \sqrt{(A_Q^x)^2 + (A_Q^y)^2} = 59477.18 \text{ mm/s}^2$$

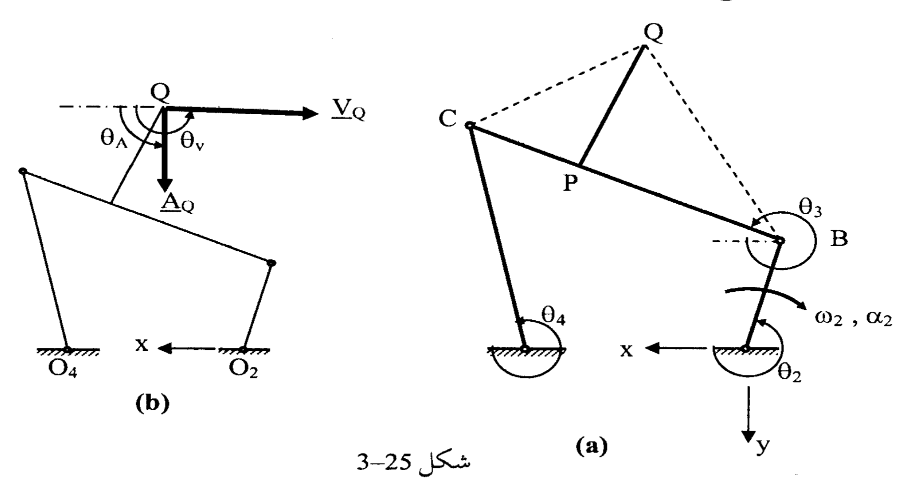
ويكون اتجاه عجلة النقطة Q هو:

$$\theta_A = \tan^{-1}(A_Q^y / A_Q^x) = \tan^{-1}[(-59477)/(84.9)] = -89.92^\circ = 270.08^\circ$$

ويبين شكل 3-24(b) متجهي السرعة والعجلة.

إعادة الحل باستخدام نظام محاور اليد اليمنى

لا تزال نقطة الأصل هي O_2 ويكون المحور x في اتجاه خط المراكز O_2O_4 أي ناحية اليسار. أما المحور y فيكون موجبا إلى أسفل، انظر شكل 3-25(a) . وبناء على ذلك تكون الزاوية θ_2 هي المعرفة بالشكل مقاسة عكس اتجاه عقرب الساعة وقيمتها 255° ، وتكون الآلية من النوع المتقاطع وذلك لأن تقاطع الضلع الرابط coupler 3 مع خط المراكز O_2O_4 يحدث في حالة $0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ$.



شكل 3-25

الحل:

ويتم الحل بالتعويض في المعادلات أو استخدام برنامج الكمبيوتر المبين في جدول 3-1. والمعطيات input data هي:

$r_1 = 66$ mm , $r_2 = 40$, $r_3 = 100$, $r_4 = 80$, $\theta_2 = 255^\circ$, $\omega_2 = -40$ rad/s , $\alpha_2 = -10$ rad/s^2

والجدول الآتي يبين الزوايا والسرعات والعجلات الزاوية (الزوايا بالدرجات

ووحدات ω هي rad/s أما وحدات α فهي rad/s^2). لاحظ أن الإشارات الموجبة تعني أن الاتجاه هو عكس عقرب الساعة.

θ_2	θ_3	θ_4	ω_3	ω_4	α_3	α_4
255	336.5	281.06	–8.54	–24.02	–189.97	137.27

ومقارنة هذه النتائج مع نتائج نظام اليد اليسرى تبين تطابقا تاما مقدارا واتجاها.

ولإيجاد إحداثيات وسرعة وعجلة النقطة Q يتم التعويض عن d (الطول BP) بالقيمة $d = BP= 64$ mm كما سبق ، أما المسافة $h = QP$ فلازالت 48 mm إلا أن إشارتها يجب أن تكون سالبة طبقا لمصطلح الإشارات الذي استعمل لاستنتاج المعادلتين (3–37) , (3–38) حيث تكون h موجبة إذا كان الإحداثي الرأسي للنقطة Q (في اتجاه المحور y) أكبر من إحداثي P ، والعكس صحيح وهذا ما نراه في شكل 3–25(a) الذي يبين أن P أقرب إلى نقطة الأصل O_2 من Q ولذلك تكون h سالبة.

وباستعمال هذه النتائج والتعويض في المعادلتين (3–37) , (3–38) نجد أن إحداثيات النقطة Q هي:

$$x_Q = 29.1 \text{ mm} , \; y_Q = -108.18 \text{ mm}$$

والإشارة الموجبة للإحداثي x_Q تدل على أنها ناحية اليسار من O_2 أما الإشارة السالبة للإحداثي y_Q فتدل على أن النقطة Q تقع أعلى من نقطة الأصل O_2.

وبالتعويض في المعادلتين (3–39) , (3–40) نجد أن:

$$V_Q^x = -2139.1 \text{ mm/s} , \; V_Q^y = 76.46 \text{ mm/s}$$

فيكون مقدار واتجاه سرعة النقطة Q هما:

$$V_Q = \sqrt{(V_Q^x)^2 + (V_Q^y)^2} = 2140.5 \text{ mm/s}$$

$$\theta_V = \tan^{-1} (V_Q^y \,/\, V_Q^x) = \tan^{-1} [(-76.46) / (2139.1)] + 180^o = 177.95^o$$

وبالتعويض في المعادلتين (3–41) , (3–42) نجد أن مركبتي عجلة النقطة Q هما:

$$A_Q^x = 84.9 \text{ mm/s}^2 \quad , \; A_Q^y = 59477.1 \text{ mm/s}^2$$

ويكون مقدار واتجاه عجلة النقطة Q هما:

$$A_Q = \sqrt{(A_Q^x)^2 + (A_Q^y)^2} = 59477.18 \text{ mm/s}^2$$

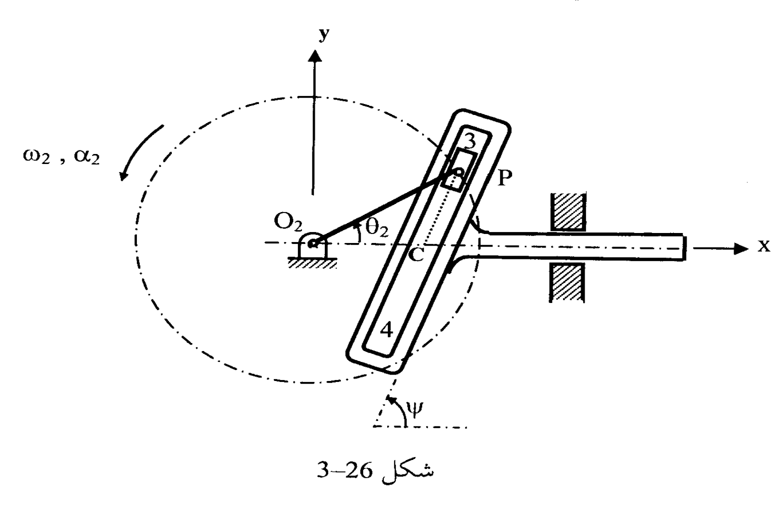
$$\theta_A = \tan^{-1} (A_Q^y / A_Q^x) = \tan^{-1} [(-59477) / (84.9)] = -89.92^\circ$$

ويبين شكل 3-25(b) متجهي السرعة والعجلة وهما منطبقان مقدارا واتجاها مع نتائج نظام محاور اليد اليسرى والمبينة في شكل 3-24(b) .

3.3 آلية الحركة التوافقية المعدلة Modified Scotch Yoke Mechanism

يوضح شكل 3-26 تركيب هذه الآلية حيث يدور الذراع O_2P فتنـــزلق النقطة P في مجرى في الجزء 4 الذي يتحرك حركة أفقية ترددية. وكي تكون هذه الحركة من نوع الحركة التوافقية البسيطة يجب أن يدور الذراع O_2P بسرعة زاوية منتظمة ω_2 ، إلا أننا هنا سنوجد معادلات الحركة للحالة العامة التي فيها يدور ذراع الدوران O_2P أيضا بعجلة زاوية منتظمة α_2 .

نلاحظ أن النقطة C ثابتة في الضلع 4 ، ولذلك يمكن تحليل حركة الضلع 4 عن طريق تحديد موضع وسرعة وعجلة هذه النقطة.



شكل 3-26

من المثلث O_2PC يمكن بتطبيق قاعدة sine rule إثبات أن X_c ، وهي المسافة O_2C ، تساوي:

$$X_c = r_2 \sin(\psi - \theta_2) / \sin(\psi) \quad (3\text{–}45)$$

حيث r_2 هو طول الذراع O_2P .

والآن بإجراء عملية الاشتقاق (التفاضل) بالنسبة للزمن للطرف الأيمن من المعادلة (3–45) مرة لإيجاد السرعة V_C ، ومرة أخرى لإيجاد العجلة A_C مع ملاحظة أن $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ وأن $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ حيث t هو الزمن ، مع الأخذ في الاعتبار أن الطول r_2 ثابت فيمكن إثبات أن:

$$V_C = -\omega_2 r_2 \cos(\psi - \theta_2) / \sin(\psi) \quad (3\text{–}46)$$

$$A_C = -r_2 [(\omega_2)^2 \sin(\psi - \theta_2) + \alpha_2 \cos(\psi - \theta_2)] / \sin(\psi) \quad (3\text{–}47)$$

مثال 14–3

في الآلية المبينة في شكل 26–3 يدور ذراع الدوران O_2P عكس عقرب الساعة. احسب سرعة وعجلة الجزء 4 مقدارا واتجاها عندما تكون $\theta_2 = 45^o$ ، علما بأن الشوط stroke الذي يقطعه هذا الجزء هو 10 cm ، وأن $\psi = 70^o$ ، وذلك:

*إذا كانت سرعة الدوران منتظمة بقيمة $\omega_2 = 100$ rev/min

*إذا كانت سرعة الدوران $\omega_2 = 100$ rev/min وعجلة الدوران منتظمة بقيمة $\alpha_2 = 10$ rad/s^2 عكس عقرب الساعة.

الحل:

$\omega_2 = 100\ (2\ \pi\ )/60 = 10.47$ rad/s

الشوط (المشوار) هو المسافة بين أبعد موضع للجزء 4 من مركز الدوران O_2 وبين أقرب موضع للجزء 4 أي أن طول ذراع الدوران O_2P هو نصف الشوط ، أي يساوي 5 cm وهذا هو البعد r_2 . وبالتعويض في المعادلة (3–45)

$X_c = r_2 \sin(\psi - \theta_2) / \sin(\psi) = (5)(\sin 25) /(\sin 70) = 2.249$ cm

$V_C = -\omega_2 r_2 \cos(\psi - \theta_2) / \sin(\psi) = -(10.47)(5)(\sin 25) /(\sin 70) = -50.5$ cm/s

والإشارة السالبة تعني أن اتجاه السرعة هو جهة اليسار.

*إذا كانت عجلة الدوران بقيمة $\alpha_2 = 0$:

$$A_C = -r_2 [(\omega_2)^2 \sin(\psi-\theta_2) + \alpha_2 \cos(\psi-\theta_2)] / \sin(\psi) = -246.6 \text{ cm/s}^2$$

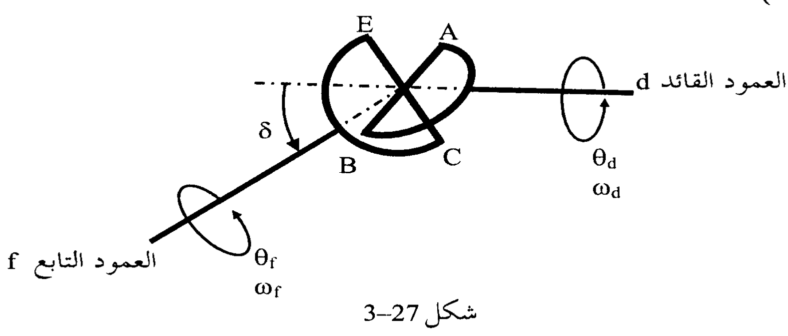
*إذا كانت عجلة الدوران منتظمة بقيمة $\alpha_2 = 10 \text{ rad/s}^2$ عكس عقرب الساعة:

$$A_C = -r_2 [(\omega_2)^2 \sin(\psi-\theta_2) + \alpha_2 \cos(\psi-\theta_2)] / \sin(\psi) = -294.82 \text{ cm/s}^2$$

والإشارة السالبة تعني أن اتجاه العجلة في الحالتين هو جهة اليسار.

3.4 آلية هوك Universal (Hooke's) Joints

تستعمل هذه الآلية في نقل الحركة الدورانية بين عمودي إدارة (shafts) بينهما زاوية δ كما هو مبين بشكل 27–3 (تفاصيل تركيب الوصلة نفسها مبين في شكل 29–2).



شكل 27–3

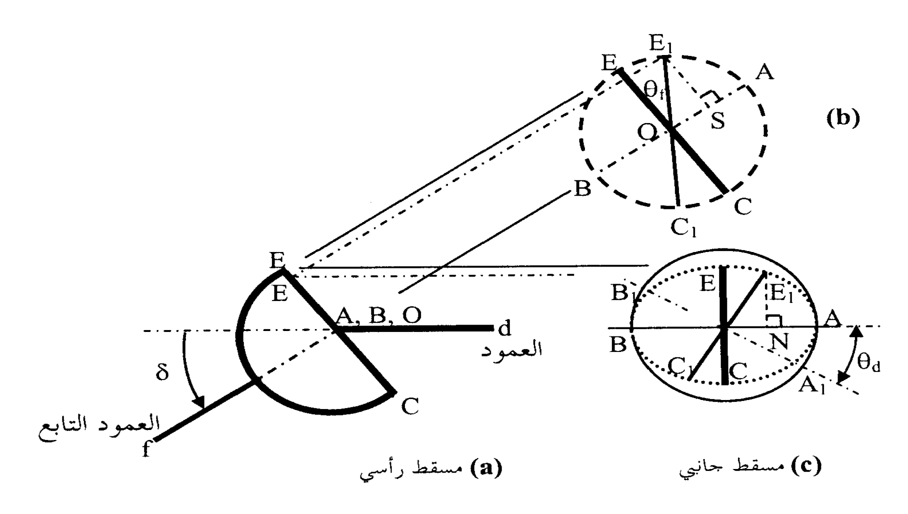
ويمكن إيجاد العلاقة بين زاوية دوران العمود القائد driving shaft وهي الزاوية θ_d وبين زاوية دوران العمود التابع driven shaft or follower وهي الزاوية θ_f كما يلي بالاستعانة بشكلي 27–3 و 28–3 . الضلع الجامد ACBE (وهو على هيئة صليب) يدور بحيث: أولا يكون مسار الذراع AB هو دائرة في مستوى رأسي عمودي على مستوى الصفحة (وهي مبينة في شكل 3–28(c) على شكل دائرة متصلة) وهذا المستوى عمودي أيضا على العمود القائد d ، وثانيا بحيث يكون مسار

الذراع CE دائرة في مستوى رأسي عمودي على مستوى الصفحة (وهي مبينة في شكل (b)28–3 على شكل دائرة متقطعة) وهذا المستوى عمودي أيضا على العمود التابع f ، وهذا يعني أن الدائرة المتصلة (شكل (c)28–3) والدائرة المتقطعة (شكل 3–28(b)) تكون بين مستويهما زاوية δ وهي مساوية لقيمة الزاوية بين عمودي الإدارة. وهاتان الدائرتان نصفا قطرهما متساويان أي أن:

$$R = OA = OB = OC = OE \qquad \text{(i)}$$

حيث R هو نصف قطر الدائرتين.

والدائرة المتقطعة (شكل (b)28–3) التي تمثل مسار الفرع CE عند إسقاطها على المستوى الرأسي الذي يحتوي الدائرة المتصلة (التي تمثل مسار الفرع AB) ، فإن مسقطها يكون هو القطع الناقص ellipse المبين منقطا في شكل (c)28–3 . وعند دوران العمود القائد زاوية مقدارها θ_d يدور الذراع BOA إلى الوضع B_1OA_1 ويدور الذراع EOC إلى الوضع E_1OC_1 بحيث تكون كلا من الزاويتين AOA_1 و E_1OE تساوي θ_d (شكل (c)28–3).



شكل 28–3

ونتيجة لدوران الذراع BOA زاوية مقدارها θ_d فإن الذراع EOC (شكل 3-28(b)) يدور إلى الوضع E_1OC_1 بحيث تكون الزاوية E_1OE تساوي θ_f . والنقطة E_1 يكون مسقطها على الخط BA ، وهو قطر الدائرة ، هو النقطة S حيث الطول OS يمكن حسابه من العلاقة:

$$OS = OE_1 \sin\theta_f = R \sin\theta_f \quad \text{(ii)}$$

ويكون الطول E_1S هو:

$$E_1S = OE_1 \cos\theta_f = R \cos\theta_f \quad \text{(iii)}$$

والنقطة E_1 يتم تعيين مسقطها (E_E) على المسقط الرأسي للوصلة والمبين في شكل 3-28(a) وفي هذه الحالة يكون الطول OE_E في هذا المسقط مساويا للطول E_1S في شكل 3-28(c) أي أن:

$$OE_E = E_1S = R \cos\theta_f \quad \text{(iv)}$$

والنقطة E_1 في شكل 3-28(c) هي مسقط E_E في المسقط الجانبي للوصلة وتقع على القطع الناقص ، شكل 3-28(b) ، وفي هذه الحالة يكون الطول E_1N في هذا المسقط هو:

$$E_1N = OE_E \cos\delta = E_1S \cos\delta = R \cos\theta_f \cos\delta \quad \text{(v)}$$

ومن قواعد الهندسة الفراغية

$$OS = ON \quad \text{(vi)}$$

وبالتعويض من (ii) في (vi)

$$ON = OS = R \sin\theta_f \quad \text{(vi)}$$

ومن المثلث OE_1N

$$\tan\theta_d = \frac{ON}{NE_1} = \frac{R \sin\theta_f}{R \cos\theta_f \cos\delta} = \frac{\tan\theta_f}{\cos\delta} \quad \text{(vii)}$$

أي أن:

$$\tan\theta_f = \cos\delta \tan\theta_d \quad (3\text{–}48)$$

وهذه المعادلة توضح أن زاوية دوران العمود التابع driven shaft or follower تختلف عن زاوية دوران العمود القائد driving shaft ، وأن الاختلاف بينهما يعتمد على الزاوية بين العمودين.

وبإجراء عملية التفاضل (الاشتقاق) بالنسبة للزمن مع ملاحظة أن $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ يمكن إثبات أن:

$$\frac{\omega_f}{\omega_d} = \frac{\cos^2\delta}{1 - \sin^2\theta_d \sin^2\delta} \qquad (3\text{–}49)$$

حيث ω_d هي السرعة الزاوية للعمود القائد ، ω_f هي السرعة الزاوية للعمود التابع. وهذه المعادلة تبين أنه إذا دار القائد بسرعة منتظمة فإن التابع يدور بسرعة غير منتظمة وهذا هو أهم عيوب استخدام هذه الوصلة. وقد وضح الفصل الثاني أنه يمكن التغلب جزئيا على هذه المشكلة باستخدام وصلتين من هذا النوع.

مثال 15–3

إذا استعملت وصلة هوك لنقل الحركة بين عمودين الزاوية بينهما 30^o ، وكان العمود القائد يدور بسرعة منتظمة مقدارها 500 rev/ min احسب:

* أقصى سرعة وأقل سرعة للعمود التابع
* التغير الكلي في نسبة سرعة التابع إلى سرعة القائد
* زاوية دوران التابع عندما يدور القائد 40^o
* زاوية دوران القائد التي تتساوى عندها سرعة العمودين
* سرعة التابع عندما يدور القائد بزاوية 25^o

ارسم أيضا منحنى تغير نسبة سرعة التابع إلى سرعة القائد مع زاوية دوران القائد.

الحل: من المعادلة (3–49) يمكن إثبات أن أقصى سرعة للعمود التابع $\omega_{f_{max}}$ تحدث عندما تكون $\theta_d = 90^o$ ، وفي هذه الحالة يكون:

$$\omega_{f_{max}} / \omega_d = 1 / \cos\delta \qquad (3\text{–}50)$$

$$= 1 / \cos 30 = 1.155$$

$$\omega_{f_{max}} = (1.155)(500) = 577.5 \text{ rev/ min}$$

ويمكن أيضا إثبات أن أقل سرعة للعمود التابع $\omega_{f_{min}}$ تحدث عندما تكون $\theta_d = 0^o$ وفي هذه الحالة يكون:

$$\omega_{f_{min}} / \omega_d = \cos\delta \qquad (3-51)$$

$$= \cos 30 = 0.866$$

$$\omega_{f_{min}} = (0.866)(500) = 433 \text{ rev/min}$$

تعريف التغير الكلي في نسبة سرعة التابع إلى سرعة القائد T هو:

$$T = \omega_{f_{max}} / \omega_d - \omega_{f_{min}} / \omega_d$$

وقيمة T تحسب من المعادلة:

$$T = \frac{1}{\cos\delta} - \cos\delta \qquad (3-52)$$

$$= 1.155 - 0.866 = 0.289 = 28.9\%$$

عند دوران القائد زاوية 40^o يدور التابع زاوية θ_f ويحسب مقدارها من المعادلة :(3-48)

$$\theta_f = \tan^{-1} [\cos\delta \ \tan\theta_d] = \tan^{-1} [\cos 30 \tan 40] = 36^o$$

زاوية دوران القائد التي عندها تتساوى عندها السرعتان، أي تكون $\omega_f = \omega_d$، هي الزاوية ϕ وتحسب قيمتها بجعل الطرف الأيمن من المعادلة (3-49) يساوي 1 ، أي

$$\frac{\cos^2\delta}{1 - \sin^2\phi \ \sin^2\delta} = 1$$

وباستخدام قواعد حساب المثلثات يمكن تبسيط المعادلة إلى الصورة:

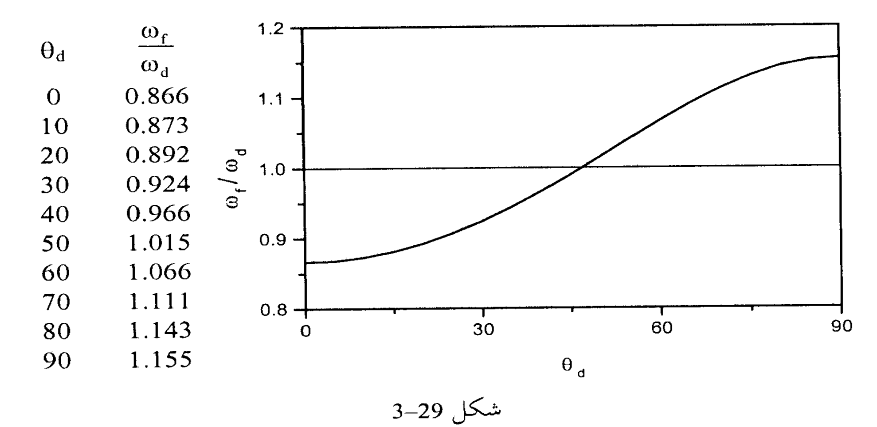
$$\tan\phi = \frac{1}{\sqrt{\cos\delta}} \qquad (3-53)$$

$$\phi = \tan^{-1}(\sqrt{\cos 30}) = 47.061^o$$

عندما يدور القائد بزاوية 25^o فإن سرعة التابع يمكن حسابها من المعادلة(3-49) :

$$\frac{\omega_f}{\omega_d} = \frac{\cos^2\delta}{1 - \sin^2\theta_d \ \sin^2\delta} = \frac{\cos^2 30}{1 - \sin^2 25 \ \sin^2 30} = 0.915$$

$$\omega_f = (0.915)(500) = 581.39 \text{ rev/ min}$$



θ_d	$\frac{\omega_f}{\omega_d}$
0	0.866
10	0.873
20	0.892
30	0.924
40	0.966
50	1.015
60	1.066
70	1.111
80	1.143
90	1.155

شكل 29-3

لرسم منحنى تغير نسبة سرعة التابع إلى سرعة القائد مع زاوية دوران القائد نعوض في المعادلة (49-3) لعدد من قيم θ_d لنحصل على المنحنى المبين في شكل29-3 ويبين الشكل أن التابع يكون أبطأ من القائد من الزاوية 0^o إلى الزاوية 47^o ، ثم تفوق سرعته سرعة القائد من الزاوية 47^o إلى الزاوية 90^o ، ويتكرر هذا كل ربع دورة ، أي أن كل دورة يدورها القائد بسرعة منتظمة يدور التابع دورة كاملة أيضا ولكن بسرعة متغيرة أثناء الدوران.

مثال 16-3

إذا استعملت وصلة هوك لنقل الحركة بين عمودين وكان العمود القائد يدور بسرعة منتظمة مقدارها 600 rev/min ولوحظ أن التغير الكلي في نسبة سرعة التابع إلى سرعة القائد هو 10% احسب:

* أقصى سرعة وأقل سرعة للعمود التابع
* سرعة التابع عندما يدور التابع نفسه بزاوية 25^o

الحل:

المعادلة (52-3) تحتوي على متغيرين هما الزاوية بين العمودين δ (وهي مجهولة) ، والتغير الكلي في نسبة سرعة التابع إلى سرعة القائد T (وهو معلوم) ، ولذلك يلزم

تعديل صورة المعادلة لحساب δ ويتم ذلك بضرب الطرفين في $\cos\delta$ وتجميع الحدود كلها في الجانب الأيسر:

$$\cos^2\delta - T\cos\delta - 1 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية والمجهول فيها هو $\cos\delta$. وباستعمال المعادلة المعروفة لحل معادلات الدرجة الثانية يكون:

$$\cos\delta = -0.5\,T + 0.5\sqrt{T^2+4} \qquad (3\text{–}54)$$

$$= -0.5(0.1) + 0.5\sqrt{0.1^2+4} = 0.9511$$

$$\delta = \cos{-1}\ 0.9511 = 18^\circ$$

وبمعرفة الزاوية بين العمودين يمكن إجراء تحليل كامل للآلية . فمن المعادلات (3–50) و (3–51)

$$\omega_{f_{max}} / \omega_d = 1/\cos\delta = 1/\cos 18 = 1.051$$

$$\omega_{f_{max}} = (1.051)(600) = 630.877 \text{ rev/ min}$$

$$\omega_{f_{min}} / \omega_d = \cos\delta = \cos 18 = 0.951$$

$$\omega_{f_{min}} = (0.951)(600) = 570.634 \text{ rev/min}$$

لإيجاد سرعة التابع عندما يدور التابع نفسه بزاوية 25° (وهي الزاوية θ_f) يجب أولا حساب زاوية دوران القائد (وهي الزاوية θ_d) باستعمال المعادلة (48 –3):

$$\tan\theta_d = \tan\theta_f / \cos\delta = \tan 25 / \cos 18 = 0.515$$

$$\theta_d = \tan^{-1} 0.515 = 26.12^\circ$$

عندما يدور القائد بزاوية 26.12° فإن سرعة التابع يمكن حسابها من المعادلة (3–49) :

$$\frac{\omega_f}{\omega_d} = \frac{\cos^2\delta}{1-\sin^2\theta_d\sin^2\delta} = \frac{\cos^2 18}{1-\sin^2 26.12\ \sin^2 18} = 0.969$$

$$\omega_f = (0.969)(600) = 457.39 \text{ rev/ min}$$

خاتمة الفصل الثالث

تعتمد الطرق الهندسية لتحليل حركة الآليات على استنتاج معادلات لتعيين مواضع الوصلات والأضلاع ، ثم إجراء عملية التفاضل لهذه المعادلات بالنسبة إلى الزمن لإيجاد معادلات السرعات الخطية للوصلات والسرعات الزاوية للأضلاع ، ومن ثم إجراء عملية التفاضل لمعادلات السرعة بالنسبة إلى الزمن لإيجاد معادلات العجلات الخطية للوصلات والعجلات الزاوية للأضلاع. وهذه الطريقة مباشرة إلا أنها تحتاج إلى استعمال مكثف للهندسة المستوية (والفراغية أحيانا كما في وصلة هوك) وكذلك للعمليات الجبرية التي تنطوي على الكثير من قواعد حساب المثلثات للوصول إلى معادلات السرعة والعجلة في صور مبسطة ، ولذلك فربما يجد القارئ أن الطرق الهندسية تكون مفيدة في حالة الآليات البسيطة التي تتكون من عدد قليل من الأضلاع وأنه بزيادة عدد الأضلاع في الآلية يكون من الأفضل اللجوء إلى طرق أخرى من التي ستعرض في الفصول القادمة.



الفصل الرابع
تحليل الآليات باستعمال الأعداد المركبة
Mathematical Analysis Using Complex Algebra

ركز الفصل السابق على استعمال الطريقة الأولى من الطرق التحليلية لدراسة الحركة والتي تعتمد على العلاقات الهندسية. وكان الحل يبدأ بإيجاد العلاقات الهندسية التي تصف الحركة ثم إجراء عملية الاشتقاق (التفاضل) لإيجاد معادلات السرعة والعجلة. ووضحت الأمثلة التي أعطيت أن الطريقة مفيدة في الآليات البسيطة ، ولكنها تكون معقدة في كثير من الآليات الأخرى. أما هذا الفصل فيناقش الطريقة الثانية من الطرق التحليلية لدراسة الحركة وهي المعتمدة على جبر الأعداد المركبة. وفيما يلي شرح الطريقة وتطبيقها على بعض الآليات الشائعة.

4.1 مقدمة عن جبر الأعداد المركبة Complex Algebra

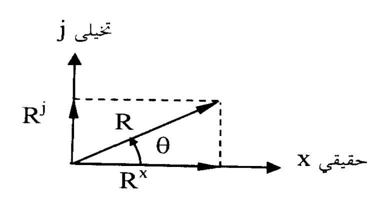
يمكن تمثيل الكمية المتجهة بسهم بحيث يمثل طوله مقدار الكمية المتجهة ويمثل اتجاهه اتجاه الكمية المتجهة. ويوضح شكل 1–4 المتجه $\underline{R}$ ومركباته R^x و R^y في اتجاه المحورين المتعامدين x و y ويعرف هذا النوع من المحاور بالمحاور الكرتيزية Cartesian axes. ويعرف اتجاه السهم بمقدار الزاوية θ المحصورة بين السهم وبين الاتجاه الموجب لمحور x (المتجه ناحية اليمين) كما هو موضح في شكل 1–4 . ويلاحظ أن قيمة θ تتراوح بين صفر و 360^o درجة وأنها تقاس عند قاعدة السهم (أي ذيل السهم) والاتجاه الموجب لها يكون عكس عقرب الساعة.

ويمكن أيضا تمثيل المتجه $\underline{R}$ باستخدام الأعداد المركبة عن طريق العلاقة: المتجه = {مركبة حقيقية}+{مركبة تخيلية} . ويوضح شكل 2–4 المحورين المتعامدين x , j حيث x هو المحور الذي يمثل المركبة الحقيقية real component ، وحيث j هو المحور الذي يمثل المركبة التخيلية imaginary component . ويجب تذكر العلاقات التالية:

$j=\sqrt{-1}$, $j^2=-1$, $j^3=-j$, $j^4=1$

وعلى ذلك يمكن تمثيل المتجه $\underline{R}$ بالمعادلة $\underline{R}=R^x+j\,R^j$ كما هو موضح في شكل 2–4 . أي أن:

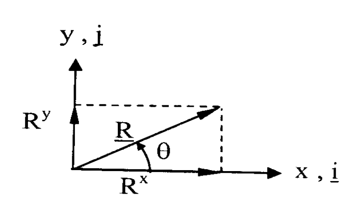
$$\underline{R} = R^x + j R^j = R \cos\theta + j R \sin\theta \quad (4\text{–}1)$$



$R^x = R \cos\theta$
$R^j = R \sin\theta$
$\underline{R} = R \cos\theta + j R \sin\theta$

المحاور المركبة

شكل 4–2



$R^x = R \cos\theta$
$R^y = R \sin\theta$
$\underline{R} = R \cos\theta\, \underline{i} + R \sin\theta\, \underline{j}$

المحاور الكارتيزية

شكل 4–1

وباستخدام علاقة أويلر Euler's formula

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta \quad (4\text{–}2)$$

حيث e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي (e = 2.7183..) يمكن تمثيل المتجه $\underline{R}$ بالمعادلة:

$$\underline{R} = R\, e^{j\theta} \quad (4\text{–}3)$$

حيث R هو طول المتجه. وتظهر ميزة تمثيل المتجه بهذه المعادلة عند إجراء عمليات التفاضل بالنسبة للزمن كما يلي.

$$\underline{R}^* = \frac{d\underline{R}}{dt} = \frac{dR}{dt}\, e^{j\theta} + j\,\omega\, R\, e^{j\theta} = R^*\, e^{j\theta} + j\,\omega\, R\, e^{j\theta} \quad (4\text{–}4)$$

وفي هذه العلاقة $\underline{R}^*$ متجه السرعة ، R^* هو معدل زيادة طول المتجه $\underline{R}$ ، أما ω فهي السرعة الزاوية للمتجه. وبإجراء عملية التفاضل بالنسبة للزمن مرة أخرى نحصل على متجه العجلة من العلاقة:

$$\underline{R}^{**} = R^{**}\, e^{j\theta} + 2 j\,\omega\, R^*\, e^{j\theta} - \omega^2 R\, e^{j\theta} + j\,\alpha\, R\, e^{j\theta} \quad (4\text{–}5)$$

حيث $\underline{R}^{**}$ هو متجه العجلة ، R^{**} هو معدل تغير R^* (أي "عجلة" زيادة

طول المتجه) ، α هي العجلة الزاوية للمتجه.

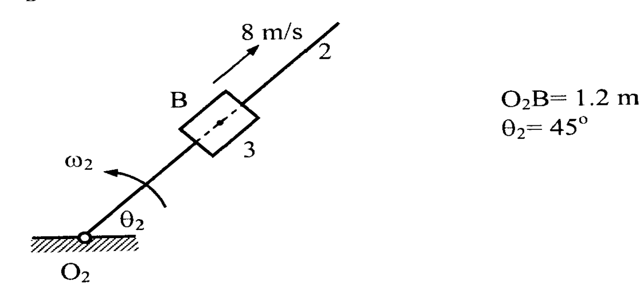
مثال 1–4

في شكل 3–4 يتحرك المنـــزلق 3 إلى الخارج بالنسبة إلى الذراع 2 بسرعة منتظمة مقدارها 8 m/s بينما يدور الذراع بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 4$ rad/s. احسب سرعة وعجلة النقطة B التي هي جزء من المنـــزلق.

الحل:

نختار المتجه $\underline{R}_B$ ليعين موضع النقطة B كما في شكل 4–4 فيكون طوله هو ($R_B = O_2B = 1.2$ m) واتجاهه هو الزاوية $\theta_2 = 45^o$. ويمكن في هذه الحالة أن نعبر عن هذا المتجه بالمعادلة:

$$\underline{R}_B = R_B\, e^{j\theta_2}$$



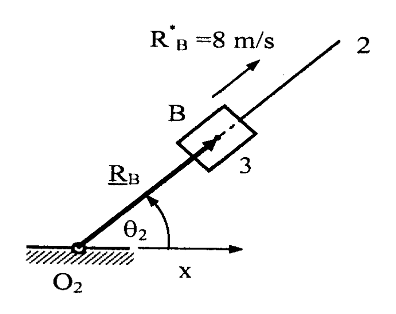
شكل 3–4

وبإجراء التفاضل مرتان نحصل على:

$$\underline{R}^{*}_{B} = R^{*}_{B}\, e^{j\theta_2} + j\,\omega_2\, R_B\, e^{j\theta_2} = e^{j\theta_2}\,(R^{*}_{B} + j\,\omega_2\, R_B) \qquad (a)$$

$$\underline{R}^{**}_{B} = R^{**}_{B}\, e^{j\theta_2} + 2\,j\,\omega_2\, R^{*}_{B}\, e^{j\theta_2} - \omega^2_2\, R_B\, e^{j\theta_2} + j\,\alpha_2\, R_B\, e^{j\theta_2} \qquad (b)$$

ويلاحظ أن $\alpha_2 = 0$ لأن السرعة الزاوية للذراع منتظمة وكذلك أن $R^{**}_{B} = 0$ لأن سرعة المنـــزلق منتظمة وتساوي ($R^{*}_{B} = 8$ m/s). وبالتعويض في المعادلة (a):



شكل 4–4

$$\underline{V}_B = \underline{R}^*_B = R^*_B\ e^{j\theta_2} + j\,\omega_2\, R_B\, e^{j\theta_2} = 8\, e^{j\theta_2} + j\,(1.2)(4)\, R_B\, e^{j\theta_2}$$

$$= 8\,(\cos 45 + j \sin 45) + 4.8\, j\,(\cos 45 + j \sin 45) = 2.26 + 9.05j$$

ويكون مقدار واتجاه سرعة النقطة B هما:

$$V_B = \sqrt{(V_B^x)^2 + (V_B^j)^2} = (2.26^2 + 9.05^2)^{0.5} = 9.33 \text{ m/s}$$

$$\beta_V = \tan^{-1}(V_B^j / V_B^x) = \tan^{-1}(9.05 / 2.26) = 75.96^o$$

ويوضح شكل 5–4 رسما تخطيطيا يبين $\underline{V}_B$ وكذلك مركباتها V_B^j و V_B^x .
ولأن المركبة V_B^x موجبة تكون

$$\theta_V = \beta_V = 75.96^o$$

وبالتعويض في المعادلة (b) نحصل على:

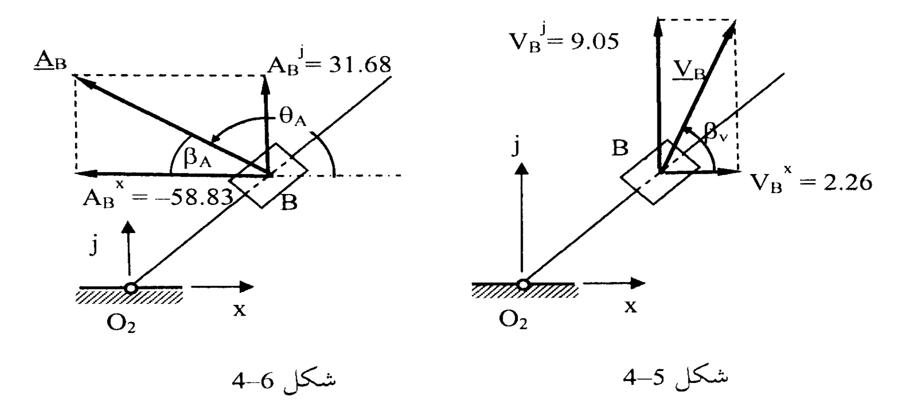
$$\underline{A}_B = \underline{R}^{**}_B = 2\, j\, \omega_2\, R^*_B\, e^{j\theta_2} - \omega_2^2\, R_B\, e^{j\theta_2}$$

$$= 2j(4)(8)\,(\cos 45 + j \sin 45) - (4^2)(1.2)\,(\cos 45 + j \sin 45) = -58.83 + 31.68j$$

ويكون مقدار واتجاه عجلة النقطة B هما:

$$A_B = \sqrt{(A_B^x)^2 + (A_B^j)^2} = [(-58.83)^2 + 31.68^2]^{0.5} = 66.82 \text{ m/s}^2$$

$\beta_A = \tan^{-1}(|V_B^j / V_B^x|) = \tan^{-1}[31.68 / (58.83)] = 28.3^o$



شكل 6–4 شكل 5–4

ويبين شكل 6–4 العجلة $\underline{A}_B$ وكذلك مركباتها A_B^j / A_B^x . ولأن المركبة A_B^x سالبة تكون:

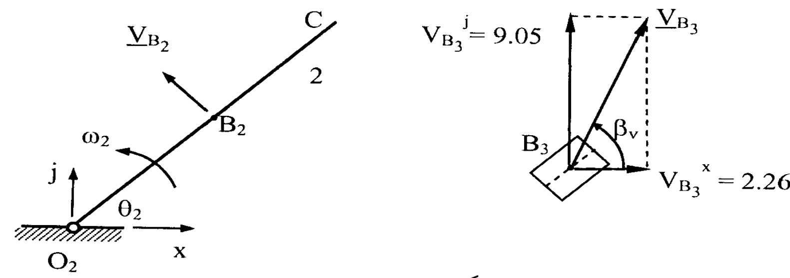
$$\theta_A = \tan^{-1}(V_B^j / V_B^x) + 180 = \tan^{-1}[31.68 / (-58.83)] + 180 = 151.7^o$$

ملاحظة مهمة: النقطة B التي تم حساب سرعتها وعجلتها فيما سبق هي نقطة علي المنـــزلق 3 ولذلك فتعريفها الصحيح هو B_3 وقد تم حذف الرقم 3 من رمز هذه النقطة في المعادلات والحسابات السابقة لتسهيل الكتابة والمناقشة. وهذه النقطة هي جزء لا يتجزأ من المنـــزلق ثابتة فيه وتتحرك معه. ولابد من التفرقة بين هذه النقطة (أي B_3) وبين نقطة أخرى هي B_2 منطبقة على B_3 في اللحظة المبينة بالرسم ولكنها جزء لا يتجزأ من الذراع 2 . وبعد مرور فترة زمنية قصيرة، تتحرك B_3 مع المنـــزلق بينما تتحرك B_2 مع الذراع وتنفصل النقطتان عن بعضهما.

ويوضح شكل 7–4 مركبات السرعة $\underline{V}_{B_3}$ كما سبق حسابها، وكذلك السرعة $\underline{V}_{B_2}$ وهاتان السرعتان عموما مختلفتان مقدارا واتجاها رغم التطابق اللحظي بين النقطتين B_2 , B_3 . وأسهل طريقة لحساب السرعة $\underline{V}_{B_2}$ هي استعمال المبادئ الأولية كما في الفصل الأول حيث:

$$V_{B_2} = \omega_2 R_{B_2} = 4(1.2) = 4.8 \text{ m/s}$$

وهذه السرعة عمودية على الذراع كما في الشكل.



شكل 7–4

ويسمى الفرق الاتجاهي بين السرعتين **بالسرعة الظاهرية** ويرمز له بالرمز $\underline{V}_{B_{3/2}}$ ويحسب من المعادلة:

$$\underline{V}_{B_{3/2}} = \underline{V}_{B_3} - \underline{V}_{B_2} \qquad (4\text{–}6)$$

$$= (2.26 + 9.05j) - (-4.8\cos 45 + 4.8j\sin 45)$$

$$= 5.66 + 5.66j$$

ومقدار هذه السرعة الظاهرية هو $V_{B_{3/2}} = (5.66^2 + 5.66^2)^{0.5} = 8 \text{ m/s}$

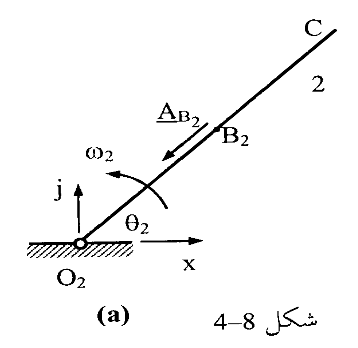
وهذه القيمة هي نفسها السرعة التي أعطيت في معطيات هذا المثال ، والهدف من حسابها هنا هو التأكيد على معناها حيث تبين لنا أن المنـــزلق يتحرك بسرعة 8 m/s على الذراع وهذه تسمى بالحركة الظاهرية (وفي بعض المراجع تسمي الحركة النسبية) وهي حركة تظهر لشخص ملتصق مع الذراع ويتحرك معه ، وبعبارة أخرى فإن هذا الشخص المثبت في الذراع يظهر له أن المنـــزلق يتحرك فقط على طول الذراع O_2C في خط مستقيم بسرعة 8 m/s بينما في الواقع فإن النقطة B_3 على المنـــزلق تتحرك بالنسبة لمحور x بسرعة مقدارها $V_{B_3} = 9.33$ m/s في الاتجاه المبين في شكل 7–4 .

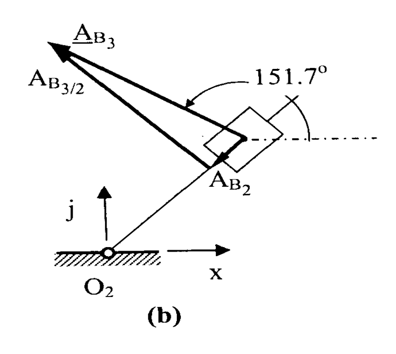
وبالمثل تحسب عجلة النقطة B_2 باستعمال المبادئ الأولية كما في الفصل الأول حيث:

$$A_{B_2} = \omega_2^2 R_{B_2} = 4^2 (1.2) = 19.2 \text{ m/s}^2$$

وتظهر هذه العجلة في شكل 4–8(a) علي هيئة متجه يبدأ من B_2 في اتجاه B_2O_2.
ومركبات هذه العجلة هما: الأفقية (19.2 cos 45–) والرأسية (19.2 cos 45–) أي أن:

$$\underline{A}_{B_2} = -19.2 \cos 45 - 19.2j \sin 45$$





(a) شكل 4–8 (b)

وتكون **العجلة الظاهرية** $\underline{A}_{B_{3/2}}$ هي

$$\underline{A}_{B_{3/2}} = \underline{A}_{B_3} - \underline{A}_{B_2} \quad (4\text{–}7)$$

$$= -58.83+31.68j - (-19.2 \cos 45 - 19.2j \sin 45)$$

$$= -45.255 + 45.255\, j$$

ومقدار هذه العجلة الظاهرية هو $A_{B_{3/2}} = (45.255^2 + 45.255^2)^{0.5} = 64 \text{ m/s}^2$
واتجاهها عمودي على المسار الظاهري للنقطة B_3 الذي هو نفسه الذراع O_2C (ولذلك تكون هذه العجلة الظاهرية عمودية أيضا على السرعة الظاهرية $\underline{V}_{B_{3/2}}$) وهذا يظهر في شكل 4–8(b) الذي يوضح حل المعادلة (4–7) بالرسم.

وعلى الرغم من أن المنـــزلق يتحرك بسرعة منتظمة على الذراع إلى الخارج فإن العجلة الظاهرية $\underline{A}_{B_{3/2}}$ لا تساوى صفرا كما أكدت حساباتنا ذلك، بل ظهرت لها قيمة يمكن إثبات أنها تكافئ المقدار (الإثبات موجود في ملحق الفصل التاسع)

$$A^c_{B_3B_2} = 2\, \omega_2\, V_{B_{3/2}} \quad (4\text{–}8)$$

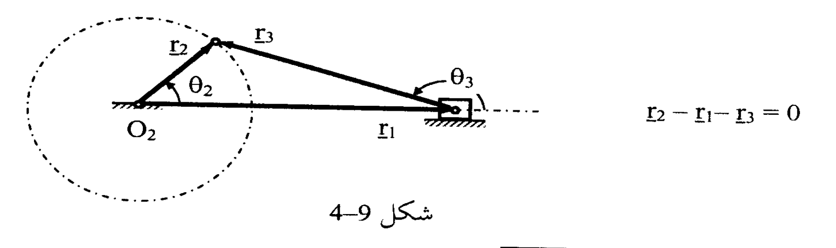
وهذه الكمية تسمى عجلة كوريولس[1] Coriolis acceleration وتظهر عند دراسة حركة جسمين متحركين بالنسبة لبعضهما مثل انزلاق النقطة B_3 على الذراع 2 في المسألة الحالية، واتجاهها دائما يكون عموديا على المسار الظاهري للنقطة B_3 على الذراع (أي عمودية أيضا على السرعة الظاهرية $\underline{V}_{B_3/2}$).

4.2 تمثيل الآليات اتجاهيا - معادلات الدائرة المغلقة

Loop Closure Equation

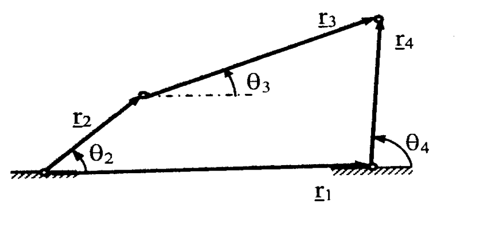
أوضح المثال السابق كيفية تحليل آلية بسيطة باستعمال الأعداد المركبة وبين أن الحل يبدأ بمعادلة اتجاهية تمثل موضع وصلات الآلية وأي نقط يراد وصف حركتها، ثم إجراء عمليات التفاضل لإيجاد السرعة والعجلة.

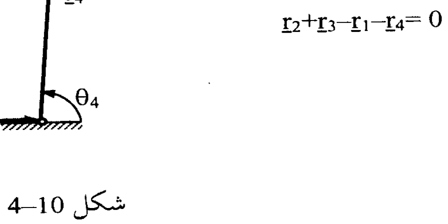
ومن المفيد في هذا الصدد معرفة أن كثيرا من الآليات تكون دائرة مغلقة وبهذا يمكن تمثيل هذه الآليات بمعادلات اتجاهية بحيث يكون حل هذه المعادلات هو تحليل للآلية التي تمثلها. وتبين أشكال 4-9 إلى 4-12 بعض الأمثلة ، ومنها يظهر أن المعادلات الاتجاهية هي لدائرة مغلقة ، وأن معظم المتجهات هي الخطوط بين الوصلات (أي أن الحل يبدأ بتعيين موضع الوصلات) ، وأن أحد المتجهات يجب أن يكون في اتجاه حركة المنـــزلق إن وجد. وهذه الملاحظة الأخيرة يمكن رؤية مثال لها في شكل 4-9 حيث مسار المنـــزلق هو المتجه الثابت $\underline{r}_1$ ، وكذلك مثال آخر في شكل 4-11 حيث مسار المنـــزلق هو المتجه المتحرك $\underline{r}_3$ والذي ينطبق على ضلع 3 وهو الضلع الذي ينـــزلق عليه المنـــزلق.



شكل 4-9

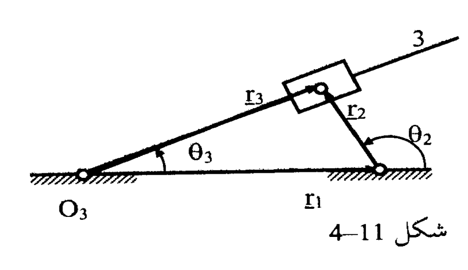
(١) Coriolis مهندس عسكري فرنسي عاش في الفترة (1843-1792) وكان أول من وجه النظر إلى وجـــود هـــذه المركبـــة في الحركة.





$\underline{r}_2+\underline{r}_3-\underline{r}_1-\underline{r}_4=0$

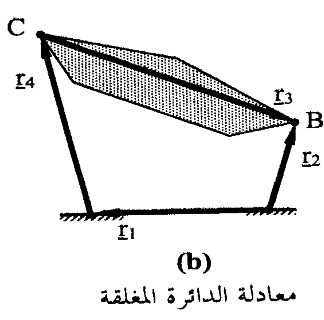
شكل 4–10



$\underline{r}_1+\underline{r}_2-\underline{r}_3=0$

شكل 4–11

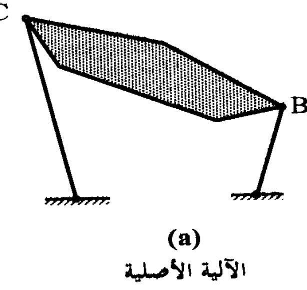
ويؤكد شكل 12–4 أنه في حالة وصلات المفصل hinges فإن شكل الضلع الجامد الذي يصل بينها لا يهم بل العبرة هي في مقدار طول المسافة بين المفصلات.



(b)

معادلة الدائرة المغلقة

$\underline{r}_1+\underline{r}_4+\underline{r}_3-\underline{r}_2=0$



(a)

الآلية الأصلية

شكل 4–12

ويجب ملاحظة أن المعادلات الاتجاهية التي تصف الآلية (المعادلات الموجودة في أشكال 9–4 إلى 12–4 مثلا) يمكن استعمال كل واحدة منها لإيجاد مجهولين فقط لا أكثر، وذلك لأن كل واحدة من هذه المعادلات هي في الحقيقة معادلتان : فإذا كان المتجه $\underline{r} = 0$ فالمعادلة الأولى هي: المركبة الحقيقية للمتجه = صفر ، والمعادلة الثانية هي: المركبة التخيلية للمتجه = صفر . والجزء التالي من هذا الفصل يوضح هذا المفهوم بتفصيل أكبر.

4.3 آلية المنـزلق المنحرف Offset crank – slider

آلية الدوار والمنـــزلق العادية مبينة في شكل 9–4 حيث يمر خط سير المنـــزلق بنقطة O_2 وهي مركز عمود الإدارة. أما آلية المنـــزلق المنحرف المبينة في أعلى شكل 13–4 فإن مسار المنـــزلق C ينحرف عن مركز عمود الإدارة O_2 بمقدار المسافة $\underline{r}_0$.

4.3.1 تحليل الإزاحة والسرعة والعجلة

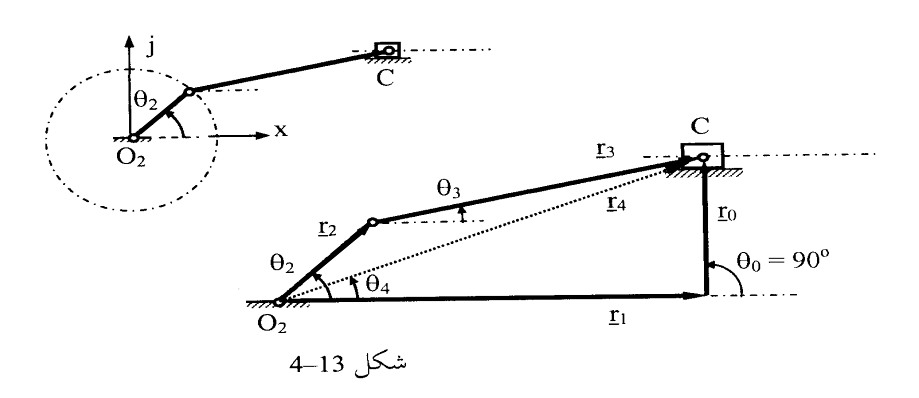
ولتحليل حركة هذه الآلية (باعتبار أن r_0 , r_2 , r_3 , θ_2 معلومة) يمكن كتابة المعادلة الاتجاهية المقفلة (انظر أسفل شكل 13–4) :

$$\underline{r}_2 + \underline{r}_3 - \underline{r}_4 = 0 \qquad (4\text{–}9)$$

وبالرغم من أن هذه المعادلة صحيحة فإنه لا يمكن الحصول على قيم المجاهيل الثلاثة $\underline{r}_4$, θ_4 , θ_3 لأن المعادلة (9–4) يمكن منها إيجاد مجهولين فقط. ومن ناحية أخرى فإن هذه المعادلة لا تحتوى على إزاحة المنـــزلق والتي يجب إجراء عمليات التفاضل لها لإيجاد سرعته وعجلته ، ولهذا يلزم استعمال معادلة أخرى مثل المعـــادلة (10–4) لتحليل حركة هذه الآلية.

$$\underline{r}_2 + \underline{r}_3 - \underline{r}_0 - \underline{r}_1 = 0 \qquad (4\text{–}10)$$

حيث المقادير r_0 , r_2 , r_3 , θ_2 معلومة وكذلك $\theta_0 = 90^o , \theta_1 = 0$. أي أنه يمكن حل هذه المعادلة لإيجاد المجهولين θ_3 , r_1 . وبالإضافة إلى ذلك فإن المعـــادلة (10–4) تحتوى على المتجه $\underline{r}_1$ وهو يمثل إزاحة المنـــزلق والتي يمكن الآن إجراء عمليات التفاضل لها لإيجاد سرعته وعجلته.



شكل 13–4

وبالتعويض من (3–4) ومراعاة أن $r_2 = R\ ,\ r_3 = L$

$$R\,e^{j\theta_2} + L\,e^{j\theta_3} - r_0\,e^{j\theta_0} - r_1\,e^{j\theta_1} = 0 \qquad (4\text{–}11)$$

وهذه هي معادلة الموضع لهذه الآلية والتي يمكن حلها لإيجاد المجهولين θ_3 , r_1 .

والحل يكون بالتعويض عن $\theta_0 = 90^o$ و $\theta_1 = 0$ وكذلك باستعمال علاقة أويلر ، أي المعادلة (2–4)

$$R\,(\cos\theta_2 + j\ \sin\theta_2) + L\ (\cos\theta_3 + j\ \sin\theta_3) - j\,r_0 - r_1 = 0 \qquad (b)$$

وتكون المركبة التخيلية لهذه المعادلة هي:

$$j\,R\ \sin\theta_2\ + j\,L\ \sin\theta_3 - j\,r_0 = 0$$

ومنها

$$\theta_3\ =\ \sin^{-1}\left(\frac{r_0 - R\ \sin\theta_2}{L}\right) \qquad (4\text{–}12)$$

وتكون المركبة الحقيقية لهذه المعادلة هي:

$$R\ \cos\theta_2 + L\ \cos\theta_3\ - r_1 = 0$$

ومنها

$$r_1\ = R\ \cos\theta_2 + L\ \cos\theta_3 \qquad (4\text{–}13)$$

وللحصول على السرعات يتم تفاضل المعادلة (11–4) بالنسبة للزمن مع الأخذ في الاعتبار أن الأطوال $R\ ,\ L\ ,\ r_0$ ثابتة (أي أن $r^*_0 = L^* = R^* = 0$) وكـــذلك أن $r_0\ ,\ r_1$ لا يدوران (أي أن $\omega_0 = \omega_1 = 0$) ، وأن $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ وبذلك نحصل على:

$$j\,\omega_2\,R\,e^{j\theta_2} + j\,\omega_3\,L\,e^{j\theta_3} - r^*_1\,e^{j\theta_1} = 0 \qquad (4\text{–}14)$$

حيث r^*_1 هو معدل زيادة طول المتجه $\underline{r}_1$ ، وهو يساوي سرعة المنـــزلق أي V_C.

وبالتعويض عن $\theta_1 = 0$ وكذلك باستعمال علاقة أويلر (2–4)

$$j\,\omega_2\,R\,(\cos\theta_2 + j\,\sin\theta_2) + j\,\omega_3\,L\,(\cos\theta_3 + j\,\sin\theta_3) - V_C = 0$$

وتكون المركبة التخيلية لهذه المعادلة هي:

$$j\,\omega_2\,R\,\cos\theta_2 + j\,\omega_3\,L\,\cos\theta_3 = 0$$

ومنها

$$\omega_3 = \frac{-R\,\cos\theta_2}{L\,\cos\theta_3}\,\omega_2 \qquad (4\text{–}15)$$

وتكون المركبة الحقيقية لهذه المعادلة هي:

$$-\omega_2\,R\,\sin\theta_2 - \omega_3\,L\,\sin\theta_3 - V_C = 0$$

ومنها

$$V_C = -\omega_2\,R\,\sin\theta_2 - \omega_3\,L\,\sin\theta_3 \qquad (4\text{-}16)$$

والآن نفاضل المعادلة (14–4) بالنسبة للزمن لنحصل على العجلات مع الأخذ في الاعتبار أن الأطوال R , L , r_0 ثابتة وأن r_0 , r_1 لا يدوران ، وأن $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

فنحصل على:

$$j\,R(j\,\omega_2^2\,e^{j\theta_2} + \alpha_2\,e^{j\theta_2}) + j\,L\,(j\,\omega_3^2\,e^{j\theta_3} + \alpha_3\,e^{j\theta_3}) - r_1^{**}\,e^{j\theta_1} = 0 \qquad (4\text{–}17)$$

حيث r_1^{**} هو "عجلة" زيادة طول المتجه $\underline{r}_1$ ، وهو يساوي عجلة المنـــزلق أي A_C.

وبالتعويض عن $\theta_1 = 0$ وكذلك باستعمال علاقة أويلر (2–4)

$$R\,(-\omega_2^2 + j\,\alpha_2)\,(\cos\theta_2 + j\,\sin\theta_2) + L\,(-\omega_3^2 + j\,\alpha_3)\,(\cos\theta_3 + j\,\sin\theta_3) - A_C = 0$$

وتكون المركبة التخيلية لهذه المعادلة هي:

$$R\,(-\omega_2^2\,j\,\sin\theta_2 + j\,\alpha_2\,\cos\theta_2) + L\,(-\omega_3^2\,j\,\sin\theta_3 + j\,\alpha_3\,\cos\theta_3) = 0$$

ومنها

$$\alpha_3 = [R(\omega_2^2 \sin\theta_2 - \alpha_2 \cos\theta_2) + \omega_3^2 L \sin\theta_3] / (L \cos\theta_3) \quad (4-18)$$

وتكون المركبة الحقيقية لهذه المعادلة هي:

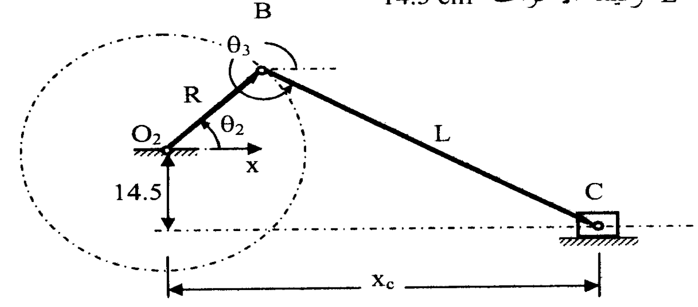
$$R (-\omega_2^2 \cos\theta_2 - \alpha_2 \sin\theta_2) + L (-\omega_3^2 \cos\theta_3 - \alpha_3 \sin\theta_3) - A_C = 0$$

ومنها

$$A_C = - R(\omega_2^2 \cos\theta_2 + \alpha_2 \sin\theta_2) - L (\omega_3^2 \cos\theta_3 + \alpha_3 \sin\theta_3) \quad (4-19)$$

مثال 2–4

في آلية المنـــزلق المنحرف المبينة في شكل 14–4 احسب السرعة والعجلة الزاوية لذراع التوصيل مقدارا واتجاها وكذلك سرعة وعجلة المنـــزلق عندما تكون $\theta_2=45^o$ ، علما بأن ذراع الدوران يدور عكس عقرب الساعة بسرعة ω_2 = 100 rev/min ، وعجلته الزاوية هي α_2 = 200 rad/s^2 في اتجاه عقرب الساعة.الأبعاد هي: R=20 cm
L= 57 cm وقيمة الانحراف 14.5 cm



شكل 14–4

الحل:

$\omega_2 = 100 (2 \pi)/60 = 10.47$ rad/s

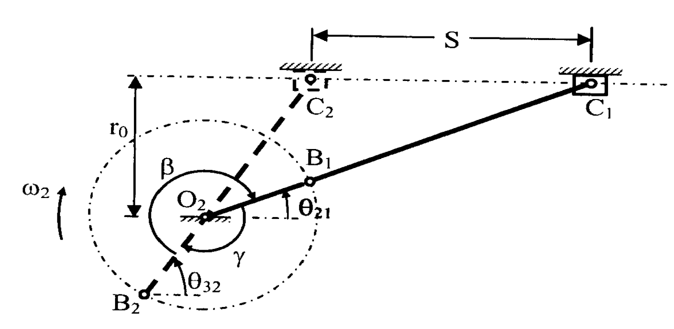
أهم ما يجب ملاحظته هو أن الانحراف r_0 هنا سالب لأن مسار المنـــزلق يقع تحت نقطة O_2 والمحور x ، وكذلك α_2 سالبة لأنها في اتجاه عقرب الساعة. وبالتعويض نحصل على النتائج التالية:

θ_2 Degrees	θ_3 Degrees	x_C cm	V_C cm/s	ω_3 rad/s	A_C cm/s^2	α_3 rad/s^2
45	−30.165	63.423	−234.13	−3	3227.89	83.605

4.3.2 الشوط (المشوار) stroke ونسبة الزمن time ratio

يوضح شكل 15–4 آلية المنــزلق المنحرف المبينة في شكل 13–4 وهي في موضع السكون الأقصى $O_2B_1C_1$ حيث يكون المنــزلق في أبعد نقطة عن محور الدوران O_2 ويكون ذراع الدوران O_2B_1 وذراع التوصيل B_1C_1 على استقامة واحدة ، وكذلك في موضع السكون الأدنى $O_2B_2C_2$ حيث يكون المنــزلق أقرب ما يمكن من محور الدوران O_2 ويكون ذراع الدوران O_2B_2 منطبقا على ذراع التوصيل B_2C_2 .

وفي موضع السكون الأقصى $O_2B_1C_1$ تكون الزاويتان θ_2 , θ_3 متساويتين (ونرمز لهما هنا بالرمز θ_{21}). وبالتعويض في المعادلة (12–4) نجد أن:



شكل 15–4

$$\theta_{21} = \sin^{-1} \frac{r_0}{L + R} \qquad (4\text{–}20)$$

ونعين r_{11} وهو الإحداثي الأفقي للنقطة C_1 بالتعويض في المعادلة (13–4) فنجد أن

$$r_{11} = (R+L) \cos \theta_{21} \qquad (4\text{–}21)$$

أما في موضع السكون الأدنى $O_2B_2C_2$ فتكون الزاويتان θ_2 , θ_3 (ونرمز لهما هنا بالرمزين θ_{22} , θ_{32} كما هو موضح في شكل 16–4) مرتبطتين بالعلاقة:

$$\theta_{22} = \theta_{32} - 180^{\circ} \qquad (4\text{–}22)$$

وبالتعويض في المعادلة (12–4) نجد أن:

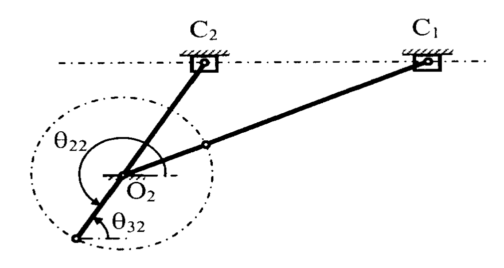
$$\theta_{32} = \sin^{-1} \frac{r_0}{L - R} \tag{4–23}$$

ونعين r_{12} وهو إحداثي النقطة C_2 بالتعويض في المعادلة (13–4) فنجد أن:

$$r_{12} = R \cos (\theta_{32} - 180^o) + L \cos \theta_{32} \tag{4–24}$$

ويكون طول الشوط (المشوار) S هو المسافة C_1C_2 ، أي أن:

$$S = r_{11} - r_{12} \tag{4–25}$$



شكل 16–4

أما نسبة الزمن T فهي النسبة بين زمن ذهاب المنـــزلق من C_2 إلى C_1 وزمن عودة المنـــزلق من C_1 إلى C_2 . فإذا كان عمود الإدارة يدور بسرعة منتظمة فإن نسبة الزمن T تساوي نسبة الزوايا β إلى γ (شكل 16–4). ويمكن من هندسة الشكل إثبات أن الزاوية $C_1 O_2 C_2$ والتي نرمز لها بالرمز δ هي:

$$\delta = | \theta_{32} - \theta_{21} | \tag{4–26}$$

ومنها تكون نسبة الزمن T هي:

$$T = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{180 + \delta}{180 - \delta} \tag{4–27}$$

المعادلات (21–4) إلى (26–4) استنتجت باستخدام جبر الأعداد المركبة وهي تحدد بالتفصيل زوايا الأضلاع وإحداثيات المنـــزلق في موضعي السكون. على أن هناك علاقات أبسط لإيجاد الشوط والزاوية δ . فمن شكل 15–4 يمكن من هندسة الشكل إثبات أن المسافة C_1C_2 وهي طول الشوط S تساوي:

$$S = \sqrt{(L+R)^2 - r_0^2} - \sqrt{(L-R)^2 - r_0^2} \qquad (4\text{-}28)$$

ويمكن من هندسة الشكل أيضا إثبات أن الزاوية $C_1 O_2 C_2$ والتي نرمز لها بالرمز δ هي:

$$\delta = \cos^{-1} \frac{|r_0|}{L+R} - \cos^{-1} \frac{|r_0|}{L-R} \qquad (4\text{-}29)$$

حيث $|r_0|$ هي القيمة المطلقة للانحراف.

مثال 3–4

في آلية المنـــزلق المنحرف المبينة في شكل 14–4 احسب إحداثيات المنـــزلق في موضعي السكون وكذلك طول الشوط (المشوار) stroke ونسبة الزمن time ratio .

الأبعاد هي: $R = 20$ cm, $L = 57$ cm وقيمة الانحراف 14.5 cm

الحل:

من المعادلتين (20–4) , (21–4)

$$\theta_{21} = \sin^{-1} \frac{r_0}{L+R} = \sin^{-1} \frac{-14.5}{57+20} = -10.85^\circ$$

$$r_{11} = (R+L) \cos\theta_{21} = (57+20)\cos(-10.85^\circ) = 75.62 \text{ cm}$$

ومن المعادلتين (23–4) , (24–4)

$$\theta_{32} = \sin^{-1} \frac{r_0}{L-R} = -23.07^\circ$$

$$r_{12} = R\cos(\theta_{32} - 180^\circ) + L\cos\theta_{32} = 34.04 \text{ cm}$$

ويوضح شكل 17–4 رسما تخطيطيا للآلية عندما يكون الانحراف سالبا (أي لأسفل). ومن المعادلة (25–4)

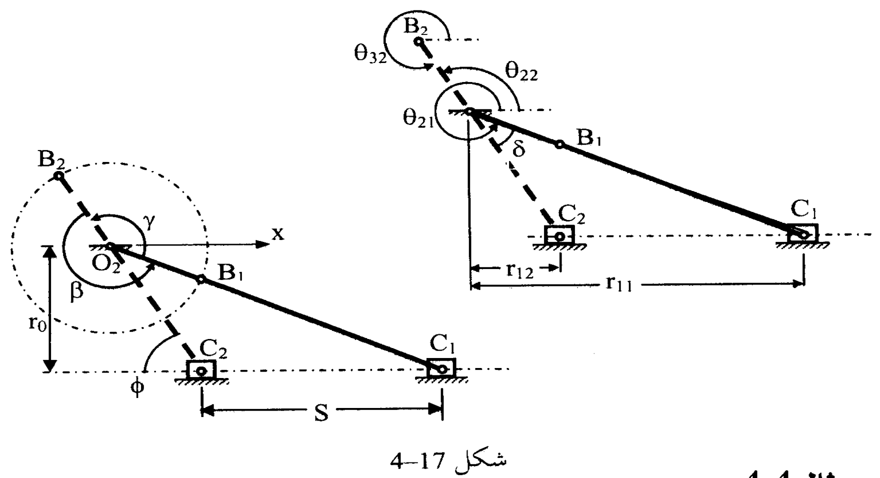
$$S = r_{11} - r_{12} = 41.58 \text{ cm}$$

ونحصل على نفس القيمة إذا عوضنا في المعادلة (28–4). ومن المعادلة (26–4)

$$\delta = |\theta_{32} - \theta_{21}| = 12.22^\circ$$

ونحصل على نفس القيمة إذا عوضنا في المعادلة (29–4)، ومن المعادلة (27–4)

$$T = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{180+\delta}{180-\delta} = 1.146$$



شكل 17–4

مثال 4–4

في آلية المنـــزلق المنحرف المبينة في شكل 17–4 احسب تأثير قيمة الانحراف r_0 على كل من طول الشوط (المشوار) stroke ونسبة الزمن time ratio .

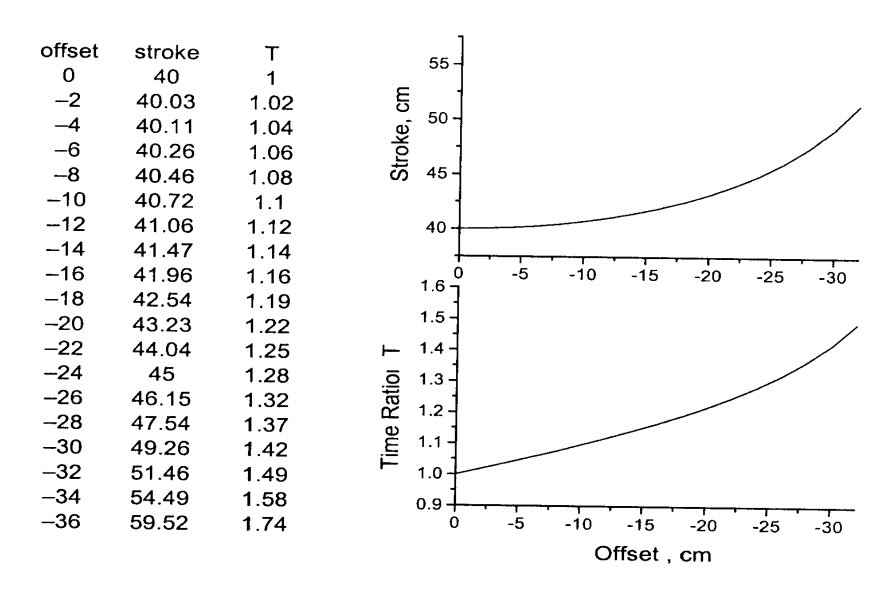
الأبعاد هي: R = 20 cm , L= 57 cm

الحل:

يمكن استعمال المعادلة (28–4) لحساب طول الشوط S كما يمكن استعمال المعادلة (29–4) لحساب الزاوية δ والمعادلة (27–4) لحساب T.

ويوضح شكل 18–4 أن كلا من الشوط S ونسبة الزمن T تزيد مع زيادة الانحراف r_0 offset، إلا أن تأثير الانحراف على T أكبر ؛ فمثلا الانحراف بمقدار 20 cm (وهو انحراف كبير يساوي قيمة R) يؤدي إلى زيادة في قيمة S مقدارها 8.1% أعلى من حالة المنـــزلق العادي ($r_0 = 0.0$) ، بينما يؤدي هذا الانحراف إلى زيادة في قيمة T مقدارها 21.8% أعلى من حالة المنـــزلق العادي.

والجدير بالملاحظة أن زيادة الانحراف يؤدي أيضا إلى زيادة زاوية الضغط pressure angle (ونرمز لها بالرمز ϕ) الموضحة في شكل 17–4 وهذا يسبب انخفاض الكفاءة في التشغيل بسبب زيادة الاحتكاك بين المنـــزلق والقاعدة مع ما يستتبعه أيضا من زيادة في التآكل في أسطح التلامس، وهذا يضع حدا على قيمة الانحراف بحيث يجب أن تكون القيمة المختارة للانحراف r_0 بحيث تحقق قيمة T المطلوبة ولا تتعدى قيمة ϕ المسموح بها.



offset	stroke	T
0	40	1
−2	40.03	1.02
−4	40.11	1.04
−6	40.26	1.06
−8	40.46	1.08
−10	40.72	1.1
−12	41.06	1.12
−14	41.47	1.14
−16	41.96	1.16
−18	42.54	1.19
−20	43.23	1.22
−22	44.04	1.25
−24	45	1.28
−26	46.15	1.32
−28	47.54	1.37
−30	49.26	1.42
−32	51.46	1.49
−34	54.49	1.58
−36	59.52	1.74

شكل 18–4

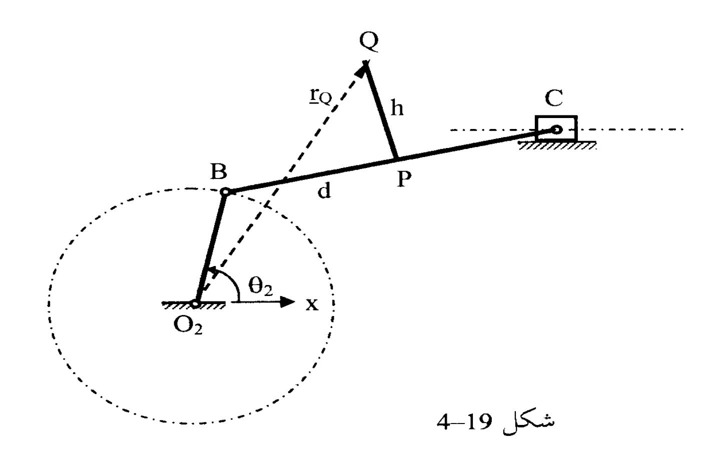
4.3.3 تحليل حركة أي نقطة على ذراع التوصيل

يبين شكل 19–4 النقطة Q المثبتة في ذراع التوصيل بوصلة جامدة بحيث لا تتغير المسافات d , h أثناء الحركة. والمتجه $\underline{r}_Q$ هو متجه الموضع للنقطة Q وهو مجهول مقدارا واتجاها ولذلك نكافئه بالثلاث متجهات المبينة في شكل 20–4 طبقا للمعادلة:

$$\underline{r}_Q = \underline{r}_2 + \underline{r}_5 + \underline{r}_6 \qquad (c)$$

حيث مقادير واتجاهات الثلاث متجهات الموجودة في الطرف الأيمن من المعادلة معلومة (لاحظ أن $\theta_6 = \theta_3 + 90^o$) ، فيكون:

$$r_Q\, e^{j\theta_Q} = R\, e^{j\theta_2} + d\, e^{j\theta_3} + h\, e^{j(90+\theta_3)} \qquad (d)$$



شكل 19–4

ويمكن حل هذه المعادلة لإيجاد الطول r_Q والزاوية θ_Q ، ولكننا عادة نحتاج إحداثيات النقطة عوضا عن ذلك. وهذه الإحداثيات نحصل عليها بسهولة إذا علمنا أن المركبة الحقيقية هي نفسها إحداثي النقطة في اتجاه المحور x ، وأن المركبة التخيلية هي إحداثي النقطة في اتجاه المحور y . أي أن:

$$x_Q = R\ \cos\theta_2 + d\ \cos\theta_3 - h\ \sin\theta_3 \qquad (4\text{–}30)$$

$$y_Q = R\ \sin\theta_2 + d\ \sin\theta_3 + h\ \cos\theta_3 \qquad (4\text{–}31)$$

وبإجراء عملية التفاضل للمعادلة (d) بالنسبة إلى الزمن نوجد سرعة النقطة Q كما يلي (مع ملاحظة أن الأبعاد R , h , d لا تتغير).

$$\frac{d}{dt}(\underline{r}_Q) = j\,\omega_2\, R\, e^{j\theta_2} + j\,\omega_3\ [\, d\, e^{j\theta_3} + h\, e^{j(90+\theta_3)}\,] \qquad (e)$$

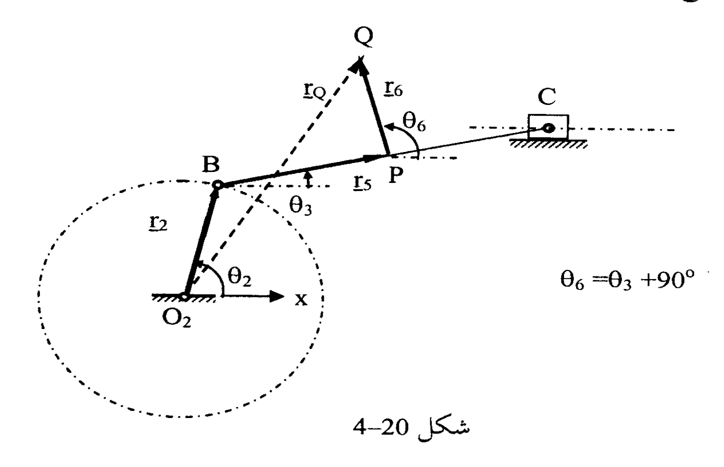
حيث الطرف الأيسر يمثل سرعة النقطة Q. والمركبة الأفقية للسرعة V_Q^x والرأسية

للسرعة V_Q^y هي نفسها المركبات الحقيقية والتخيلية للطرف الأيمن أي:

$$V_Q^x = -\omega_2 R \sin\theta_2 - \omega_3 (d \sin\theta_3 + h \cos\theta_3) \qquad (4\text{–}32)$$

$$V_Q^y = \omega_2 R \cos\theta_2 + \omega_3 (d \cos\theta_3 - h \sin\theta_3) \qquad (4\text{–}33)$$

وبإجراء عملية التفاضل للمعادلة (e) بالنسبة إلى الزمن نوجد عجلة النقطة Q كما يلي (مع ملاحظة أن الأبعاد d , h , R لا تتغير)



شكل 20–4

$$\frac{d^2}{dt^2}(\underline{r}_Q) = j\,\alpha_2 R e^{j\theta_2} - \omega_2^2 R e^{j\theta_2} + (j\,\alpha_3 - \omega_3^2)[d e^{j\theta_3} + h e^{j(90+\theta_3)}] \qquad (e)'$$

حيث يمثل الطرف الأيسر عجلة النقطة Q. والمركبة الأفقية لهذه العجلة A_Q^x والمركبة الرأسية لها A_Q^y هي نفسها المركبات الحقيقية والتخيلية للطرف الأيمن أي:

$$A_Q^x = -\omega_2^2 R \cos\theta_2 - \alpha_2 R \sin\theta_2 - \alpha_3 (d \sin\theta_3 + h \cos\theta_3) - \omega_3^2 (d \cos\theta_3 - h \sin\theta_3) \qquad \textbf{(4–34)}$$

$$A_Q^y = \alpha_2 R \cos\theta_2 - \omega_2^2 R \sin\theta_2 + \alpha_3 (d \cos\theta_3 - h \sin\theta_3) - \omega_3^2 (d \sin\theta_3 + h \cos\theta_3) \qquad \textbf{(4–35)}$$

مثال 5–4

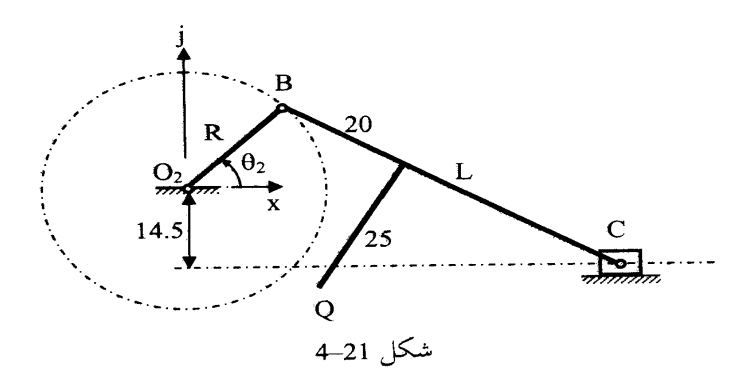
في آلية المنـــزلق المنحرف المبينة في شكل 21–4 عين إحداثيات النقطة Q

واحسب سرعة وعجلة هذه النقطة مقدارا واتجاها عندما تكون $\theta_2 = 45°$ ، علما بأن ذراع الدوران يدور عكس عقرب الساعة بسرعة $\omega_2 = 100$ rev/min ، وعجلته الزاوية هي $\alpha_2 = 200$ rad/s^2 في اتجاه عقرب الساعة. الأبعاد هي:

$R = 20$ cm, $L = 57$ cm وقيمة الانحراف 14.5 cm

الحل:

في مثال 2–4 تم حساب زوايا الآلية والسرعات والعجلات الزاوية لذراع التوصيل. وباستعمال هذه النتائج مع معطيات هذا المثال: $d=20$ cm , $h=-25$ cm والتعويض في المعادلتين (4–30) , (4–31) نجد أن إحداثيات النقطة Q هي:



شكل 4–21

$$x_Q = R\cos\theta_2 + d\cos\theta_3 - h\sin\theta_3 = 18.87 \text{ cm}$$

$$y_Q = R\sin\theta_2 + d\sin\theta_3 + h\cos\theta_3 = -17.52 \text{ cm}$$

وبالتعويض في المعادلتين (4–32) , (4–33) نجد أن مركبتي سرعة النقطة Q هما:

$$V_Q^x = -\omega_2 R\sin\theta_2 - \omega_3(d\sin\theta_3 + h\cos\theta_3) = -243.21 \text{ cm/s}$$

$$V_Q^y = \omega_2 R\cos\theta_2 + \omega_3(d\cos\theta_3 - h\sin\theta_3) = 133.86 \text{ cm/s}$$

ويكون مقدار سرعة النقطة Q هو:

$$V_Q = \sqrt{(V_Q^x)^2 + (V_Q^y)^2} = 277.61 \text{ cm/s}$$

ويكون اتجاه سرعة النقطة Q هو:

$$\theta_V = \tan^{-1} (V_Q^y \;/\; V_Q^x) = \tan^{-1} [133.86 \;/(-243.21)] + 180^\circ \;= 151.17^\circ$$

وقد أضيف المقدار 180° لأن V_Q^x سالبة. ويبين شكل 22–4 هذه السرعة مقدارا واتجاها. وبالتعويض في المعادلتين (34–4) , (35–4) نجد أن مركبتي عجلة النقطة Q هما:

$$A_Q^x = 3882.8 \text{ cm/s}^2 \qquad , \; A_Q^y = -3697.5 \text{ cm/s}^2$$

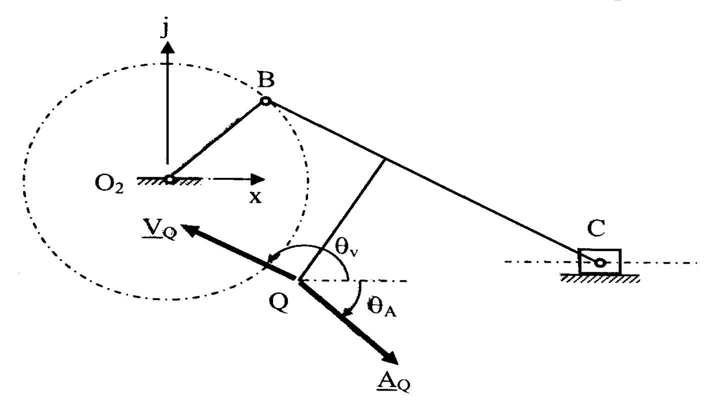
ويكون مقدار عجلة النقطة Q هو:

$$A_Q = \sqrt{(A_Q^x)^2 + (A_Q^y)^2} = 5361.6 \text{ cm/s}^2$$

ويكون اتجاه عجلة النقطة Q هو:

$$\theta_A = \tan^{-1} (A_Q^y / A_Q^x) = \tan^{-1} (-3697.5 \;/\; 3882.8) = -\,43.6^\circ$$

ويبين شكل 22–4 هذه العجلة مقدارا واتجاها.

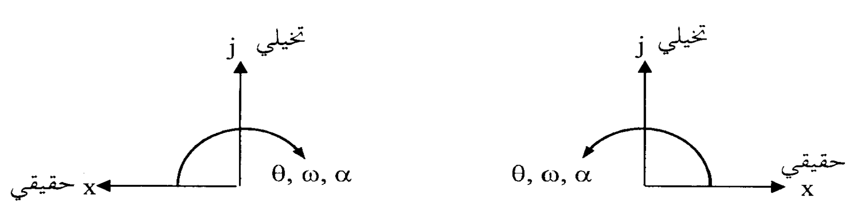


شكل 22–4

4.3.4 ملاحظات على نظام المحاور

اعتمدت جميع العلاقات التي تم استنتاجها فيما سبق من هذا الفصل على اختيار ثلاثة محاور متعامدة (x , j , z) حيث الاتجاه الموجب للمحور x جهة اليمين والاتجاه

الموجب للمحور j لأعلى والاتجاه الموجب للمحور z عمودي على مستوى الرسم ومتجه ناحية القارئ. وهذا النظام للمحاور يظهر منه المحوران x , j عند رسم الآليات المستوية كما هو الحال في معظم هذا الفصل. وهذا النظام للمحاور يتبع قاعدة اليد اليمنى ولهذا تكون الزوايا الموجبة عكس عقارب الساعة.



محاور متعامدة وتتبع قاعدة اليد اليمنى   محاور متعامدة وتتبع قاعدة اليد اليسرى

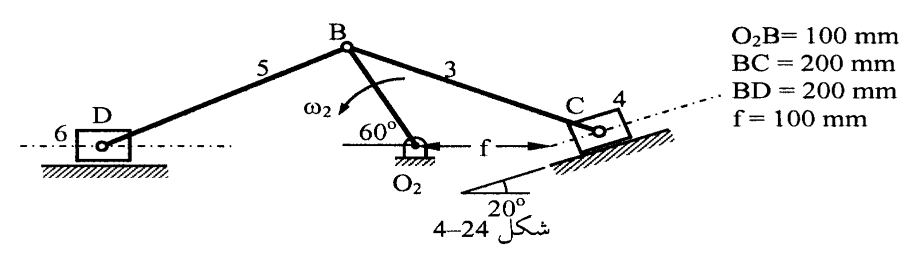
شكل 23–4

على أن هناك حالات يكون من الأسهل فيها استعمال محاور ثلاثة متعامدة ولكن تتبع قاعدة اليد اليسرى كما هو موضح في شكل 23–4 الذي يقارن النظامين. ويتبين من الشكل أنه في نظام اليد اليسرى يظل المحور z عموديا على مستوى الرسم ومتجها ناحية القارئ ، ولكن يتغير ترتيب المحورين x , j بحيث يصبح قياس الزوايا الموجبة هو في اتجاه دوران عقرب الساعة وليس عكسها كما هو الحال في نظام اليد اليمنى. ونظام اليد اليسرى هو في الحقيقة صورة مرآة لنظام اليد اليمنى. ويلزم التأكيد هنا أن جميع المعادلات التي تستنتج باستعمال أي من النظامين تنطبق عليهما معا.

مثال 6–4

في الآلية المبينة في شكل 24–4 ذراع الدوران O_2B يدور عكس عقرب الساعة بسرعة منتظمة $\omega_2 = 10$ rad/s . احسب سرعة وعجلة كل من المنـــزلقين عند D , C مقدارا واتجاها ، والسرعة والعجلة الزاوية لكل من ذراعي التوصيل 3 , 5.

الحل:



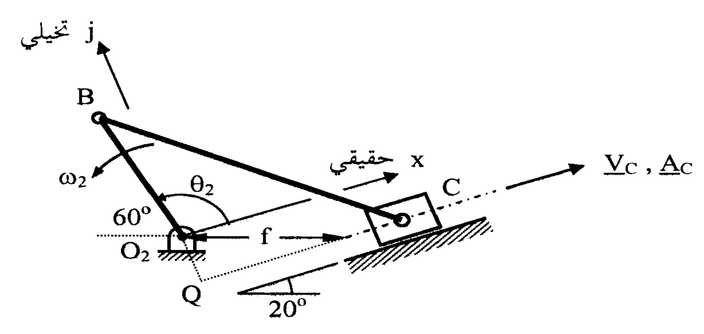
شكل 24–4

الجزء الأيمن من هذه الآلية هو آلية المنـــزلق المنحرف لأن مسار المنـــزلق C لا يمر بمحور الدوران عند O_2. ولتحليل الحركة باستعمال المعـــادلات التي تم استنتاجها فيما سبق يجب أن تكون نقـــطة الأصل عند O_2 والمحور x موازي لمسار المنـــزلق والمحور j عمودي عليه كما هو مبين في شكل 25–4 ، وهذه المحاور تتبع نظام اليد اليمنى. ويكون مقدار الانحراف r_0 مساويا للطول O_2Q وهو المسافة العمودية من نقطة الأصل O_2 على مسار المنـــزلق وقيمتها:

$r_0 = O_2Q = -f \sin 20^o = -100 \sin 20^o = -34.2$ mm

وسبب الإشارة السالبة هو أن مسار المنـــزلق يقع تحت نقطة الأصل O_2. ويمكن تلخيص المعطيات كما يلي:

R = 100 mm, L= 200 mm, $r_0 = -34.2$ mm, $\theta_2 = 100^o$, $\omega_2 = 10$ rad/s, $\alpha_2 = 0$



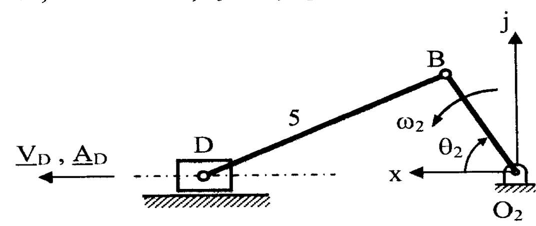
شكل 25–4

ويتم الحصول على قيم θ_3 , ω_3 , V_C , α_2 , A_C بالتعويض في المعادلات (12–4) إلى (19–4) . والجدول الآتي يبين النتائج.

θ_2 Degrees	ω_3 rad/s	α_3 rad/s^2	V_C mm/s	A_C mm/s^2
100	1.16	64.61	–830.8	10108.1

أما الجزء الأيسر من الآلية الأصلية المبينة في شكل 24–4 فهو آلية المنـــزلق العادية لأن مسار المنـــزلق D يمر بمحور الدوران عند O_2. ولتحليل الحركة يجب أن تكون نقطة الأصل عند O_2 والمحور x موازيا لمسار المنـــزلق (أي أفقيا) والمحور j عموديا عليه ، والأسهل في هذه الحالة أخذ المحور x ناحية اليسار والمحور j لأعلى كما هو مبين في شكل 26–4 ، وهذه المحاور تتبع نظام اليد اليسرى. ويمكن استعمال المعادلات التي تم استنتاجها فيمـــا سبق للآلية المنحـــرفة ، أي المعادلات (12–4) إلى (19–4) ، ولكن يكون مقدار الانحراف r_0 مساويا للصفر ، أو يمكن استعمال المعادلات المستنتجة في الفصل الثالث لآلية المنـــزلق العادية. ويمكن تلخيص المعطيات كما يلي:

$$R = 100 \text{ mm}, L = 200 \text{ mm}, r_0 = 0 , \theta_2 = 60^{o} , \omega_2 = -10 \text{ rad/s}, \alpha_2 = 0$$



شكل 26–4

والجدول الآتي يبين النتائج.

θ_2 Degrees	ω_5 rad/s	α_5 rad/s^2	V_D mm/s	A_D mm/s^2
60	2.77	44.34	1106.2	–2546.5

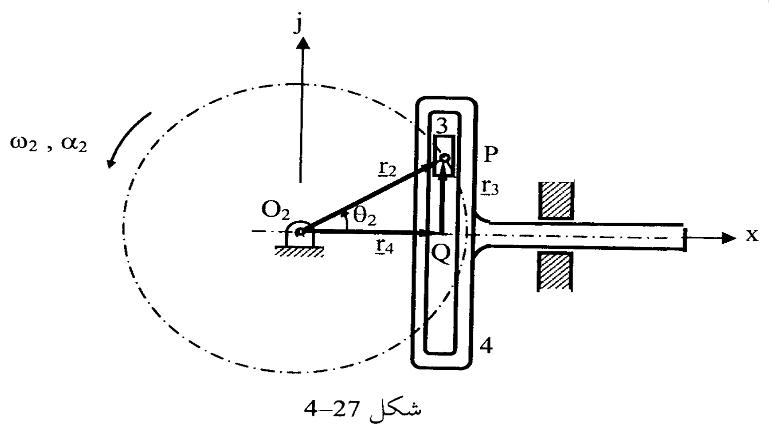
وطبقا لقاعدة اليد اليسرى تكون كل من ω_5 , α_5 مع اتجاه عقرب الساعة لأنهما موجبتان ، وتكون A_D ناحية اليمين لأنها سالبة.

4.4 آلية الحركة التوافقية Scotch Yoke Mechanism

يوضح شكل 27-4 تركيب هذه الآلية حيث يدور الذراع O_2P فتنـــزلق النقطة P في مجرى في الجزء 4 الذي يتحرك حركة أفقية ترددية. وكي تكون هذه الحركة من نوع الحركة التوافقية البسيطة يجب أن يدور الذراع O_2P بسرعة زاوية منتظمة ω_2 ، إلا أننا هنا سنوجد معادلات الحركة للحالة العامة التي فيها يدور ذراع الدوران O_2P بعجلة زاوية منتظمة α_2 .

ومعادلة الموضع لهذه الآلية يجب أن تحتوي على متجه أفقي يصف انزلاق الجزء 4 أفقيا ، وكذلك متجه رأسي يصف حركة المنـــزلق الرأسي 3 ومعه النقطة P . وهذان المتجهان يتقاطعان في النقطة Q وعلى هذا تكون معادلة الموضع لهذه الآلية هي

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_4 + \underline{r}_3 \qquad (f)$$



شكل 27-4

والمجهولان في هذه المعادلة هما المقداران r_3 , r_4 . والطول r_4 يحدد البعد الأفقي للجزء 4 من النقطة O_2 أما الطول r_3 فيحدد البعد الرأسي للنقطة P من محور x .

وبالتعويض من (3-4)

$$r_2\, e^{j\theta_2} - r_4\, e^{j\theta_4} - r_3\, e^{j\theta_3} = 0 \qquad (4\text{–}36)$$

وبالتعويض من معادلة أويلر (2-4)

$$r_2\,(\cos\theta_2 + j\ \sin\theta_2) - r_3\ (\cos\theta_3 + j\ \sin\theta_3) - r_4\ (\cos\theta_4 + j\ \sin\theta_4) = 0$$

وبمراعاة أن $\theta_3 = 90^o$ وأن $\theta_4 = 0^o$ ، يكون:

$$r_2 (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2) - j r_3 - r_4 = 0$$

وتكون المركبة التخيلية لهذه المعادلة هي:

$$r_2 (j \sin \theta_2) - j r_3 = 0$$

ومنها نحسب r_3 وهي المسافة PQ

$$r_3 = r_2 \sin \theta_2 \qquad (4\text{–}37)$$

وتكون المركبة الحقيقية لهذه المعادلة هي:

$$r_2 \cos \theta_2 - r_4 = 0$$

ومنها نحسب r_4 وهي المسافة O_2Q

$$r_4 = r_2 \cos \theta_2 \qquad (4\text{–}38)$$

وللحصول على السرعات نفاضل المعادلة (4–36) بالنسبة للزمن مع الأخذ في الاعتبار أن الطول r_2 ثابت وأن r_3 , r_4 لا يدوران ، وأن $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ نحصل على:

$$j \omega_2 r_2 e^{j\theta_2} - r^*_3 e^{j\theta_3} - r^*_4 e^{j\theta_4} = 0 \qquad (4\text{–}39)$$

حيث r^*_4 هو معدل زيادة طول المتجه r_4 ، وهو يساوي السرعة الأفقية للجزء 4، r^*_3 هو معدل زيادة طول المتجه r_3 ، وهو يساوي السرعة الرأسية للمنـــزلق 3 ومعه النقطة P.

وبالتعويض عن $\theta_3 = 90^o$ و $\theta_4 = 0^o$ وكذلك باستعمال علاقة أويلر (4–2)

$$j \omega_2 r_2 (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2) - j r^*_3 - r^*_4 = 0$$

وتكون المركبة التخيلية لهذه المعادلة هي:

$$j \omega_2 r_2 \cos \theta_2 - j r^*_3 = 0$$

ومنها:

$$r^*_3 = \omega_2 r_2 \cos \theta_2 \qquad (4\text{–}40)$$

وتكون المركبة الحقيقية لهذه المعادلة هي:

$$- \omega_2 r_2 \sin \theta_2 - r^*_4 = 0$$

ومنها:

$$r^*_4 = -\omega_2 r_2 \sin\theta_2 \quad (4\text{–}41)$$

والآن نفاضل المعادلة (39–4) بالنسبة للزمن لنحصل على العجلات مع الأخذ في الاعتبار أن الطول r_2 ثابت وأن r_4 , r_3 لا يدوران ، وأن $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ فنحصل على

$$j\, r_2 (j\, \omega_2^2\, e^{j\theta_2} + \alpha_2\, e^{j\theta_2}) - r_4^{**}\, e^{j\theta_4} - r_3^{**}\, e^{j\theta_3} = 0 \quad (4\text{–}42)$$

حيث r_4^{**} هو "عجلة" زيادة طول المتجه $\underline{r}_4$ ، وهو يساوي عجلة الجزء 4 (ومعه النقطة Q) ، r_3^{**} هو عجلة المنـــزلق 3 ومعه النقطة P.

وبالتعويض عن $\theta_3 = 90^o$ و $\theta_4 = 0^o$ وكذلك باستعمال علاقة أويلر (2–4)

$$r_2 (-\omega_2^2 + j\, \alpha_2) (\cos\theta_2 + j \sin\theta_2) - r_4^{**} - j\, r_3^{**} = 0$$

وتكون المركبة التخيلية لهذه المعادلة هي:

$$r_2 (-\omega_2^2\, j \sin\theta_2 + j\, \alpha_2 \cos\theta_2) - j\, r_3^{**} = 0$$

ومنها:

$$r_3^{**} = r_2 (-\omega_2^2 \sin\theta_2 + \alpha_2 \cos\theta_2) \quad (4\text{–}43)$$

وتكون المركبة الحقيقية لهذه المعادلة هي:

$$r_2 (-\omega_2^2 \cos\theta_2 - \alpha_2 \sin\theta_2) - r_4^{**} = 0$$

ومنها:

$$r_4^{**} = r_2 (-\omega_2^2 \cos\theta_2 - \alpha_2 \sin\theta_2) \quad (4\text{–}44)$$

مثال 7–4

في الآلية المبينة في شكل 27–4 يدور ذراع الدوران O_2P عكس عقرب الساعة. احسب سرعة وعجلة الجزء 4 مقدارا واتجاها عندما تكون $\theta_2 = 45^o$ ، علما بأن الشوط stroke الذي يقطعه هذا الجزء هو 10 cm وذلك:

- إذا كانت سرعة الدوران منتظمة بقيمة $\omega_2 = 100$ rev/min
- إذا كانت سرعة الدوران $\omega_2 = 100$ rev/min وعجلة الدوران منتظمة بقيمة $\alpha_2 = 10$ rad/s عكس عقرب الساعة.

الحل:

$\omega_2 = 100\ (2\ \pi\ )/60 = 10.47$ rad/s

الشوط (المشوار) هو المسافة بين أبعد موضع للجزء 4 من مركز الدوران O_2 وبين أقرب موضع للجزء 4 أي أن طول ذراع الدوران O_2P هو نصف الشوط ، أي يساوي 5 cm وهذا هو البعد r_2 . وبالتعويض في المعادلة (41–4)

$V_Q = r^*_4 = -\omega_2\ r_2\ \sin\theta_2 = -(10.47)(5)(\sin 45) = -37.02$ cm/s

والإشارة السالبة تعني أن اتجاه السرعة يكون جهة اليسار. وبالتعويض في المعادلة (44–4) أولا في حالة سرعة الدوران المنتظمة ($\alpha_2 = 0$) :

$A_Q = r_4^{**} = r_2\ (-\omega_2^2 \cos\theta_2 - \alpha_2 \sin\theta_2\ ) = -(5)(10.47)^2\ (\cos 45) = -387.57$ cm/s^2

وبالتعويض في المعادلة (44–4) ثانيا في حالة $\alpha_2 = 10$ rad/s :

$A_Q = r_4^{**} = r_2\ (-\omega_2^2 \cos\theta_2 - \alpha_2 \sin\theta_2\ ) = -(5)\{(10.47)^2\ (\cos 45) - 10\ \sin 45\}$

$= -423.07$ cm/s^2

مثال 8–4

في الآلية المبينة في شكل 27–4 يدور ذراع الدوران O_2P عكس عقرب الساعة بسرعة منتظمة $\omega_2 = 100$ rev/min احسب أقصى سرعة وأقصى عجلة للجزء 4 مقدارا واتجاها ، علما بأن الشوط stroke الذي يقطعه هذا الجزء هو 10 cm .

الحل:

من المثال السابق $r_2 = 5$ cm . ومن معادلة السرعة ، أي المعادلة (41–4) ، يتضح أن أقصى سرعة $V_{Q\ max}$ هي عند الزوايا $\theta_2 = 90^o$, $\theta_2 = 270^o$ وتكون قيمتها عند $\theta_2 = 90^o$ هي:

$V_{Q\ max} = -\omega_2\ r_2 = -(10.47)(5) = -\ 52.35$ cm/s

ومن معادلة العجلة ، أي المعادلة (44–4) ، وفي حالة السرعة الزاوية المنتظمة ($\alpha_2 = 0$) يتضح أن أقصى عجلة $A_{Q\ max}$ هي عند الزوايا $\theta_2 = 0^o$, $\theta_2 = 180^o$ وتكون قيمتها عند $\theta_2 = 0^o$ هي:

$A_{Q\ max} = -\omega_2^2\ r_2 = -(10.47)^2\ (5) = -548.1$ cm/s^2

4.5 آلية فرجار القطع الناقص Elliptic trammel

يوضح شكل 28–4 تركيب هذه الآلية حيث يتحرك المنـــزلق 3 في مجرى أفقي بينما يتحرك المنـــزلق 4 في مجرى رأسي ويدور الذراع 2 فتتحرك نقطة Q على مسار قطع ناقص.

4.5.1 تحليل السرعة والعجلة

فيما يلي سنحلل هذه الآلية على فرض أن المعطيات هي سرعة المنـــزلق 3 (أي V_B) والزاوية θ_2 وطول الذراع BC وهو يساوي r_2.

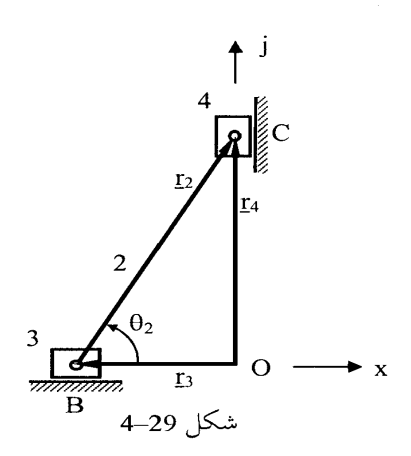
يجب أن تحتوي معادلة الموضع لهذه الآلية على متجه أفقي يصف حركة المنـــزلق 3 أفقيا ، وكذلك متجه رأسي يصف حركة المنـــزلق الرأسي 4. وهذان المتجهان يتقاطعان في النقطة O المبينة في شكل 29–4 (وهي نقطة الأصل) وعلى هذا تكون معادلة الموضع لهذه الآلية هي:

$$\underline{r}_2 + \underline{r}_3 = \underline{r}_4 \qquad (g)$$

4 C Q 2 3 θ_2 $\underline{V}_B$ B

شكل 28–4

والمجهولان في هذه المعادلة هما المقداران r_3 , r_4 . والطول r_3 يحدد البعد الأفقي للمنـــزلق 3 من النقطة O أما الطول r_4 فيحدد البعد الرأسي للنقطة C من النقطة O. وبالتعويض من (3–4)



شكل 29–4

$$r_2\, e^{j\theta_2} = r_4\, e^{j\theta_4} - r_3\, e^{j\theta_3} \qquad (4\text{–}45)$$

وبالتعويض من معادلة أويلر (2–4)

$$r_2\,(\cos\theta_2 + j\,\sin\theta_2) + r_3\,(\cos\theta_3 + j\,\sin\theta_3) - r_4\,(\cos\theta_4 + j\,\sin\theta_4) = 0$$

وبمراعاة أن $\theta_3 = 180^\circ$ وأن $\theta_4 = 90^\circ$ ، يكون:

$$r_2\,(\cos\theta_2 + j\,\sin\theta_2) - j\,r_4 + r_3 = 0$$

وتكون المركبة التخيلية لهذه المعادلة هي:

$$r_2\,(j\,\sin\theta_2) - j\,r_4 = 0$$

ومنها نحسب r_4 وهي المسافة CO

$$r_4 = r_2\,\sin\theta_2 \qquad (4\text{–}46)$$

وتكون المركبة الحقيقية لهذه المعادلة هي:

$$r_2\,\cos\theta_2 + r_3 = 0$$

ومنها نحسب r_3 وهي المسافة OB

$$r_3 = -\,r_2\,\cos\theta_2 \qquad (4\text{–}47)$$

وللحصول على السرعات نفاضل المعادلة (45–4) بالنسبة للزمن مع الأخذ في الاعتبار أن الطول r_2 ثابت وأن r_3 , r_4 لا يدوران ، وأن $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ نحصل على:

$$j\,\omega_2 r_2 e^{j\theta_2} + r^*_3 e^{j\theta_3} - r^*_4 e^{j\theta_4} = 0 \qquad (4\text{–}48)$$

حيث r^*_3 هو معدل زيادة طول المتجه $\underline{r}_3$ ، وهو يساوي السرعة الأفقية للجزء 3 أي V_B ، r^*_4 هو معدل زيادة طول المتجه $\underline{r}_4$ ، وهو يساوي السرعة الرأسية للمنـــزلق 4 ومعه النقطة C.

وبالتعويض عن $\theta_3 = 180^o$ و $\theta_4 = 90^o$ وكذلك باستعمال علاقة أويلر (4–2)

$$j\,\omega_2\ r_2 (\cos\theta_2 + j\ \sin\theta_2) - j\,r^*_4\ + r^*_3\ = 0$$

وتكون المركبة الحقيقية لهذه المعادلة هي:

$$-\,\omega_2 r_2\ \sin\theta_2 + r^*_3 = 0$$

وبملاحظة أن $V_B = r^*_3$ تكون السرعة الزاوية للذراع BC هي:

$$\omega_2 = \frac{V_B}{r_2 \sin\theta_2} \qquad (4\text{–}49)$$

وتكون المركبة التخيلية لهذه المعادلة هي:

$$j\,\omega_2 r_2\ \cos\theta_2 - j\,r^*_4 = 0$$

ومنها:

$$V_C = r^*_4 = \omega_2 r_2\ \cos\theta_2 \qquad (4\text{–}50)$$

والآن نفاضل المعادلة (48–4) بالنسبة للزمن لنحصل على العجلات مع الأخذ في الاعتبار أن الطول r_2 ثابت وأن r_3 , r_4 لا يدوران ، وأن $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ فنحصل على

$$j\,r_2 (j\,\omega_2^2\ e^{j\theta_2} + \alpha_2\ e^{j\theta_2}) - r_4^{**}\ e^{j\theta_4} + r_3^{**}\ e^{j\theta_3} = 0 \qquad (4\text{–}51)$$

حيث r_4^{**} هو "عجلة" زيادة طول المتجه $\underline{r}_4$ ، وهو يساوي عجلة الجزء 4 (ومعه النقطة C) ، r_3^{**} هو عجلة المنـــزلق 3 ومعه النقطة B.

وبالتعويض عن $\theta_3 = 180^o$ و $\theta_4 = 90^o$ وكذلك باستعمال علاقة أويلر (4–2)

$$r_2 (-\,\omega_2^2 + j\,\alpha_2) (\cos\theta_2 + j\,\sin\theta_2) + r_3^{**} - j\,r_4^{**} = 0$$

وتكون المركبة الحقيقية لهذه المعادلة هي:

$$r_2 (-\,\omega_2^2 \cos\theta_2 - \alpha_2 \sin\theta_2) + r_3^{**}\ = 0$$

وبملاحظة أن $A_B = r_3^{**}$ تكون العجلة الزاوية للذراع BC هي:

$$\alpha_2 = \frac{A_B - \omega_2^2 r_2 \cos\theta_2}{r_2 \sin\theta_2} \quad (4\text{–}52)$$

وتكون المركبة التخيلية لهذه المعادلة هي:

$$r_2 (- \omega_2^2 j \sin\theta_2 + j \alpha_2 \cos\theta_2) - j r_3^{**} = 0$$

ومنها:

$$A_C = r_4^{**} = r_2 (- \omega_2^2 \sin\theta_2 + \alpha_2 \cos\theta_2) \quad (4\text{–}53)$$

مثال 9–4

في الآلية المبينة في شكل 28–4 يتحرك المنـــزلق 3 إلى اليمين بسرعة منتظمة V_B = 40 cm/s احسب سرعة وعجلة النقطة C مقدارا واتجاها عندما تكون $\theta_2 = 60^o$ ، علما بأن طول الذراع BC هو 20 cm . احسب أيضا السرعة والعجلة الزاوية للذراع BC.

الحل:

بالتعويض في المعادلة (49–4)

$$\omega_2 = \frac{V_B}{r_2 \sin\theta_2} = (40)/(20 \sin 60^o) = 2.31 \text{ rad/s}$$

والإشارة الموجبة تعنى أن اتجاه السرعة هو عكس اتجاه عقرب الساعة. وبالتعويض في المعادلة (50–4)

$$V_C = \omega_2 r_2 \cos\theta_2 = (2.31)(20)(\cos 60) = 23.1 \text{ cm/s}$$

والإشارة الموجبة تعنى أن السرعة V_C اتجاهها لأعلى.

وبالتعويض في المعادلة (52–4)

$$\alpha_2 = \frac{A_B - \omega_2^2 r_2 \cos\theta_2}{r_2 \sin\theta_2} = -(2.31)^2(20)(\cos 60) / (20 \sin 60) = -3.08 \text{ rad/s}^2$$

والإشارة السالبة تعنى أن العجلة في اتجاه عقرب الساعة. وبالتعويض في المعادلة (4–53)

$$A_C = r_2 (- \omega_2^2 \sin\theta_2 + \alpha_2 \cos\theta_2) = 20(-2.31^2 \sin 60 - 3.08 \cos 60) = -123 \text{ cm/s}^2$$

والإشارة السالبة تعنى أن العجلة لأسفل.

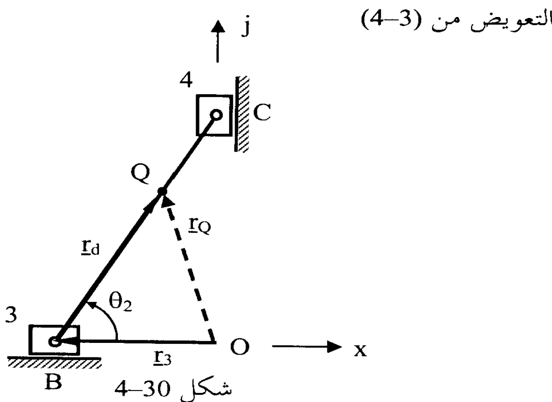
4.5.2 تحليل حركة أي نقطة على الذراع

بعد إيجاد α_2 , ω_2 يمكن حساب إحداثيات سرعة وعجلة أي نقطة ، مثل Q المبينة في شكل 30–4 ، مقدارا واتجاها كما سنبين فيما يلي.

معادلة الموضع للنقطة Q هي:

$$\underline{r}_Q = \underline{r}_d + \underline{r}_3 \qquad \text{(h)}$$

وبالتعويض من (3–4)



شكل 30–4

$$\underline{r}_Q = r_d\, e^{j\theta_2} + r_3\, e^{j\theta_3} \qquad \text{(i)}$$

وبالتعويض من معادلة أويلر (2–4) وبالرمز لإحداثيات Q بالرمزين X_Q , Y_Q

$$(X_Q + j\ Y_Q) - r_d\,(\cos\theta_2 + j\ \sin\theta_2) - r_3\ (\cos\theta_3 + j\ \sin\theta_3) = 0$$

وبمراعاة أن $\theta_3 = 180^o$ وأن $r_d = d$ وهي معلومة ، يكون:

$$(X_Q + j\ Y_Q) - d\,(\cos\theta_2 + j\ \sin\theta_2) + r_3 = 0 \qquad \text{(j)}$$

وبمساواة المركبة الحقيقية لطرفي المعادلة

$$X_Q = d\ \cos\theta_2 - r_3 \qquad (4\text{–}54)$$

وبمساواة المركبة التخيلية لطرفي المعادلة (j)

$$Y_Q = d\ \sin\theta_2 \qquad (4\text{–}55)$$

وللحصول على السرعات نفاضل المعادلة (i) بالنسبة للزمن مع الأخذ في الاعتبار أن الطول d ثابت وأن r_3 لا يدور ، وأن $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ فنحصل على:

$$\frac{d}{dt}(\underline{r}_Q) = j\,\omega_2\, d\, e^{j\theta_2} - r^*_3\, e^{j\theta_3} \qquad (k)$$

حيث r^*_3 يساوي السرعة الأفقية للجزء 3 أي V_B ، وحيث الطرف الأيسر يمثل سرعة النقطة Q. فتكون المركبة الأفقية لسرعة النقطة V_Q^x والمركبة الرأسية لهذه السرعة V_Q^y هي نفسها المركبات الحقيقية والتخيلية للطرف الأيمن أي:

$$V_Q^x = V_B - \omega_2\, d\, \sin\theta_2 \qquad (4\text{–}56)$$

$$V_Q^y = \omega_2\, d \cos\theta_2 \qquad (4\text{–}57)$$

وبإجراء عملية التفاضل للمعادلة (k) بالنسبة إلى الزمن نوجد عجلة النقطة Q كما يلي:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\underline{r}_Q) = j\,\alpha_2\, d\, e^{j\theta_2} - \omega_2^2\, d\, e^{j\theta_2} - r^{**}_3\, e^{j\theta_3} \qquad (l)$$

حيث الطرف الأيسر يمثل عجلة النقطة Q. والمركبة الأفقية لهذه العجلة A_Q^x والمركبة الرأسية لها A_Q^y هما نفسهما المركبات الحقيقية والتخيلية للطرف الأيمن أي

$$A_Q^x = A_B - \omega_2^2\, d \cos\theta_2 - \alpha_2\, d \sin\theta_2 \qquad (4\text{–}58)$$

$$A_Q^y = \alpha_2\, d \cos\theta_2 - \omega_2^2\, d \sin\theta_2 \qquad (4\text{–}59)$$

مثال 10–4

في الآلية المبينة في شكل 30–4 يتحرك المنـــزلق 3 إلى اليمين بسرعة منتظمة $V_B = 40$ cm/s. احسب سرعة وعجلة النقطة Q مقدارا واتجاها عندما تكون $\theta_2 = 60^o$ علما بأن المسافة BQ طولها $d = 16$ cm وأن طول الذراع BC هو 20 cm. ثم ارسم مسار النقطة Q في المدى $0 \le \theta_2 \le 360^o$

الحل:

بالتعويض في المعادلتين (56–4) , (57–4) نجد أن:

$V_Q^x = 8$ cm/s , $V_Q^y = 18.48$ cm/s

ويكون مقدار سرعة النقطة Q هو:

$$V_Q = \sqrt{(V_Q^x)^2 + (V_Q^y)^2} = 20.13 \text{ cm/s}$$

ويكون اتجاه سرعة النقطة Q مقاسا من محور x في عكس اتجاه عقرب الساعة هو

$$\theta_V = \tan^{-1}\left(V_Q^y / V_Q^x\right) = \tan^{-1}\left(14.48 / 8\right) = 66.59^\circ$$

وبالتعويض في المعادلتين (58–4) , (59–4) نجد أن مركبتي عجلة النقطة Q هما

$$A_Q^x = 0.0 \qquad , \; A_Q^y = -98.53 \text{ cm/s}^2$$

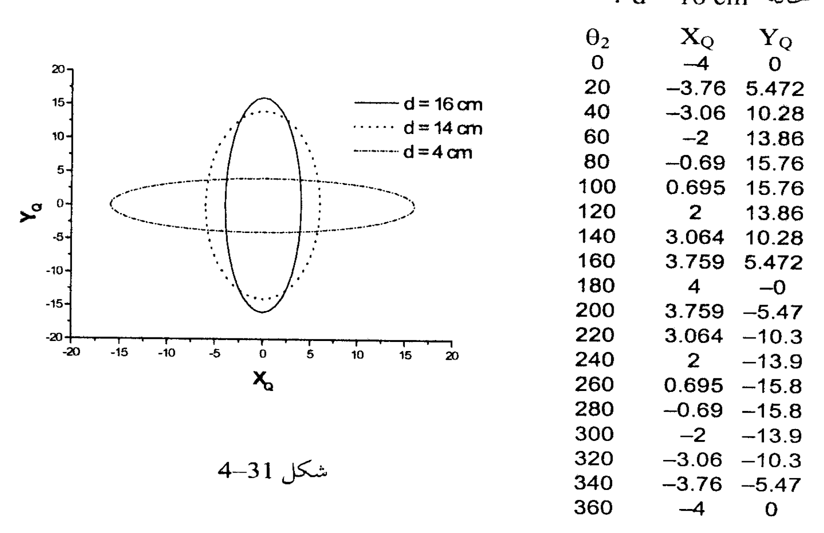
ويكون مقدار عجلة النقطة Q هو:

$$A_Q = \sqrt{(A_Q^x)^2 + (A_Q^y)^2} = -\,98.53 \text{ cm/s}^2$$

ويكون اتجاه عجلة النقطة Q هو:

$$\theta_A = \tan^{-1}\left(A_Q^y / A_Q^x\right) = 270^\circ$$

وبالتعويض في المعادلتين (54–4) , (55–4) نوجد إحداثيات النقطة Q لمختلف قيم θ_2 ويبين شكل 31–4 مسار النقطة Q لثلاث قيم للمسافة d حيث يتضح أن مسار النقطة هو قطع ناقص وأن أبعاد هذا القطع الناقص تتغير تبعا لموقع النقطة المتمثل في بعدها عن المنـــزلق الأفقي. ويبين الشكل أيضا بعض الإحداثيات بالسنتيمتر في حالة d = 16 cm .



شكل 31–4

θ_2	X_Q	Y_Q
0	–4	0
20	–3.76	5.472
40	–3.06	10.28
60	–2	13.86
80	–0.69	15.76
100	0.695	15.76
120	2	13.86
140	3.064	10.28
160	3.759	5.472
180	4	–0
200	3.759	–5.47
220	3.064	–10.3
240	2	–13.9
260	0.695	–15.8
280	–0.69	–15.8
300	–2	–13.9
320	–3.06	–10.3
340	–3.76	–5.47
360	–4	0

خاتمة الفصل الرابع

تعتمد طريقة جبر الأعداد المركبة لتحليل حركة الآليات على استنتاج معادلات اتجاهية لتعيين مواضع الوصلات والأضلاع ، ثم كتابة المتجهات على هيئة أعداد مركبة باستعمال معادلة أويلر ومن ثم إجراء عملية التفاضل لهذه المعادلات بالنسبة إلى الزمن لإيجاد معادلات السرعات الخطية للوصلات والسرعات الزاوية للأضلاع ، وكذلك إجراء عملية التفاضل لمعادلات السرعة بالنسبة إلى الزمن لإيجاد معادلات العجلات الخطية للوصلات والعجلات الزاوية للأضلاع. وأهم ميزة لهذه الطريقة هي سهولة إجراء عمليات التفاضل وبساطة العمليات الجبرية اللازمة للوصول إلى معادلات السرعة والعجلة في صور مبسطة . وما يجب تذكره دائما هو أن الطريقة تصلح لإيجاد مجهولين اثنين فقط وكذلك أنه في حالة انزلاق ضلع في الآلية على آخر يلزم أن يكون أحد المتجهات في اتجاه الانزلاق حتى يتسنى تحليل الآلية.



الفصل الخامس
تحليل الآليات باستعمال الطرق العددية
Numerical Analysis of Mechanisms

ركز الفصل الرابع على استعمال الطريقة الثانية من الطرق التحليلية لدراسة الحركة وهي المعتمدة على جبر الأعداد المركبة. وكان الحل يبدأ بإيجاد معادلة اتجاهية تمثل موضع وصلات الآلية وأي نقط يراد وصف حركتها ، ثم إجراء عمليات التفاضل بالنسبة للزمن لإيجاد السرعة والعجلة مع استعمال الأعداد المركبة لوصف المتجهات. أما هذا الفصل فيناقش بعض الطرق العددية لدراسة الحركة. ولا شك أن انتشار الحاسب الآلي (الكمبيوتر) يجعل هذه الطرق أكثر جاذبية وذلك للبساطة النسبية للمعادلات المطلوب حلها. وسيتم عرض طريقتين عدديتين فيما يلي ، تعتمد الأولى منهما على إجراء التفاضل لمعادلات الموضع عدديا ، والثانية مبنية على استعمال طريقة نيوتن-رافسون لحل معادلات الموضع.

5.1 طريقة التفاضل العددي[1] Numerical differentiation

تعتمد هذه الطريقة على استنتاج العلاقات الهندسية التي تمثل موضع وصلات الآلية وأي نقط يراد وصف حركتها ، ثم إجراء عمليات التفاضل عدديا بالنسبة للزمن لإيجاد السرعة والعجلة. وفيما يلي شرح الطريقة وتطبيقها على بعض الآليات الشائعة. ولكن البداية ستكون بمثال يوضح تطبيق الطريقة على أبسط آلية ممكنة وهي ذراع يدور بسرعة منتظمة.

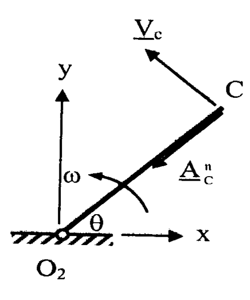
5.1.1 أساسيات الطريقة

مثال 1–5

الذراع O_2C المبين في شكل 1–5 طوله R=5 cm ويدور بسرعة زاوية منتظمة ω = 100 rev/min. احسب سرعة وعجلة النقطة C باستعمال طريقة التفاضل

(١) استحدث المؤلف طريقة تحليل حركة الآليات باستعمال التفاضل العددي المبينة هنا ، وهذه الطريقة – بقدر علمه – لم تتداول من قبل في المراجع الأخرى.

العددي وقارن النتائج مع القيم الصحيحة عندما تكون الزاوية $\theta = 50^{\circ}$.



شكل 1–5

الحل:

من معلومات الفصل الأول يمكن حساب القيم الصحيحة لسرعة النقطة C (V_c) وعجلتها (A_c) كما يلي:

$\omega = 100(2\pi/60) = 10.472$ rad/s

$V_c = \omega R = (10.472)(5) = 52.3599$ cm/s

$A_c = A_c^n = \omega^2 R = (10.472)^2(5) = 548.31$ cm/s^2

واتجاهات $\underline{V}_c$ و $\underline{A}_c$ مبينة في شكل 1–5 ، حيث A_c^n هي المركبة العمودية للعجلة (المركبة المماسة تساوي صفرًا لأن الذراع يدور بسرعة منتظمة). ولاستخدام طريقة التفاضل العددي نوجد إحداثيات النقطة C (x_c و y_c) أولا.

$x_c = R \cos\theta$, $y_c = R \sin\theta$ (5–1)

وبالتعويض

$x_c = R\cos\theta = 5(\cos 50) = 3.2139$ cm,

$y_c = R\sin\theta = 5(\sin 50) = 3.8302$ cm

والجدول رقم 1–5 يبين نتيجة التعويض في المعادلة (1–5) وكذلك النتائج العددية للسرعة والعجلة باستخدام المعادلات التي سيتم استنتاجها فيما يلي.

ملاحظة مهمة: القيم العددية المبينة في الجدول رقم 5-1 (وكذلك في تفاصيل الحسابات التالية) تظهر فيها ثلاثة أو أربعة أرقام عشرية فقط وذلك حتى يظهر الجدول في صورة مناسبة ، أما الحسابات الحقيقية فقد أجريت على برنامج لوتس وهو يحتفظ بأكثر من 18 رقمًا كليًا. ومن المهم جدا إجراء الحسابات على كمبيوتر أو آلة حاسبة calculator تحتفظ بعدد كبير من الأرقام العشرية وألا يقوم الشخص الذي يجرى الحسابات بأي تقريب للنتائج مما قد يؤدى إلى الحصول على نتائج خاطئة وخاصة في حسابات العجلة.

.بملاحظة أن السرعة هي مشتقة الإزاحة بالنسبة للزمن تكون

$$V_c^x = \frac{dx_c}{dt} = \frac{dx_c}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{dx_c}{d\theta} = \omega\frac{\Delta x_c}{\Delta\theta} \qquad (5\text{–}2)$$

$$V_c^y = \omega\frac{dy_c}{d\theta} = \omega\frac{\Delta y_c}{\Delta\theta} \qquad (5\text{–}3)$$

حيث V_c^x هي مركبة $\underline{V}_c$ في اتجاه المحور x ، و V_c^y هي مركبة $\underline{V}_c$ في اتجاه المحور y .

والمعادلات (2–5) , (3–5) صحيحة إذا كانت $\Delta\theta$ صغيرة جدا وتقرب من صفر. وكبداية سنختار $\Delta\theta$.بمقدار 0.1° ، وتكون θ^+ هي زاوية الذراع مع الأفقي بعد مرور فترة زمنية صغيرة *dt* ، وقيمتها:

$$\theta^+ = \theta + \Delta\theta = 50.1^\circ \qquad (5\text{–}4)$$

وتكون θ^- هي زاوية الذراع مع الأفقي قبل وصول الذراع إلى الزاوية 50° بفترة زمنية صغيرة *dt* ، وقيمتها:

$$\theta^- = \theta - \Delta\theta = 49.9^\circ \qquad (5\text{–}5)$$

وتكون إحداثيات النقطة C بعد مرور فترة زمنية صغيرة *dt* هي x_c^+, y_c^+ حيث

$$x_c^+ = R\cos\theta^+ = 5(\cos 50.1) = 3.2072 \text{ cm},$$
$$y_c^+ = R\sin\theta^+ = 5(\sin 50.1) = 3.8358 \text{ cm} \qquad (5\text{–}6)$$

وتكون إحداثيات النقطة C قبل وصول الذراع إلى الزاوية 50° بفترة زمنية

صغيرة dt هي y_c^- , x_c^- حيث

$$x_c^- = R\cos\theta^- = 5(\cos 49.9) = 3.2206\ \text{cm},$$
$$y_c^- = R\sin\theta^- = 5(\sin 49.9) = 3.8246\ \text{cm} \qquad (5\text{–}7)$$

وعلى هذا تكون المركبة V_c^{x+} هي المركبة الأفقية لسرعة النقطة C بعد مرور فترة زمنية صغيرة $0.5dt$ (وهذا معناه أنـــها المركبة الأفقية للسرعة عند الزاوية 50.05^o) وقيمتها هي:

$$V_c^{x+} = \omega\,(\Delta x_c/\Delta\theta) = \omega\,[(x_c^+ - x_c)/\Delta\theta] \qquad (5\text{–}8a)$$

حيث:

$$\Delta\theta = 0.1^o = 0.1(\pi/180) = 0.0017453\ \text{rad}$$
$$V_c^{x+} = 100(2\pi/60)\ [5(\cos 50.1) - 5(\cos 50)\ ] / [(0.1)(\pi/180)] = -40.139\ \text{cm/s}$$

وكذلك تكون المركبة V_c^{y+} هي المركبة الرأسية لسرعة النقطة C بعد مرور فترة زمنية صغيرة $0.5dt$ (وهي المركبة الرأسية للسرعة عند الزاوية 50.05^o) وقيمتها هي:

$$V_c^{y+} = \omega\,(\Delta y_c/\Delta\theta) = \omega\,[(y_c^+ - y_c)/\Delta\theta] \qquad (5\text{–}9a)$$
$$= 100(2\pi/60)\ [5(\sin 50.1) - 5(\sin 50)\ ] / [(0.1)(\pi/180)] = 33.621\ \text{cm/s}$$

وتكون المركبة V_c^{x-} هي المركبة الأفقية لسرعة النقطة C قبل وصول الذراع إلى الزاوية 50^o بفترة زمنية صغيرة $0.5dt$ (وهذا معناه أنـــها المركبة الأفقية للسرعة عند الزاوية 49.95^o) وقيمتها هي:

$$V_c^{x-} = \omega\,(\Delta x_c/\Delta\theta) = \omega\,[(x_c - x_c^-)/\Delta\theta] \qquad (5\text{–}8b)$$
$$= 100(2\pi/60)\ [5(\cos 50) - 5(\cos 49.9)\ ] / [(0.1)(\pi/180)] = -40.081\ \text{cm/s}$$

وكذلك تكون المركبة V_c^{y-} هي المركبة الرأسية لسرعة النقطة C قبل وصول الذراع إلى الزاوية 50^o بفترة زمنية صغيرة $0.5dt$ (وهي المركبة الرأسية للسرعة عند الزاوية 49.95^o) وقيمتها هي:

$$V_c^{y-} = \omega\,(\Delta y_c/\Delta\theta) = \omega\,[(y_c - y_c^-)/\Delta\theta] \qquad (5\text{–}9b)$$
$$= 100(2\pi/60)\ [5(\sin 50) - 5(\sin 49.9)\ ] / [(0.1)(\pi/180)] = 33.691\text{cm/s}$$

وتكون المركبة V_c^x هي المركبة الأفقية لسرعة النقطة C عند الزاوية 50^o وقيمتها هي:

$$V_c^x = 0.5(V_c^{x+} + V_c^{x-}) \qquad (5\text{–}10)$$

$$= 0.5(-40.139 - 40.081) = -40.11 \text{ cm/s}$$

وتكون المركبة V_c^y هي المركبة الرأسية لسرعة النقطة C عند الزاوية 50^o وقيمتها هي:

$$V_c^y = 0.5(V_c^{y+} + V_c^{y-}) \tag{5-11}$$

$$= 0.5(33.621+33.691) = 33.656 \text{ cm/s}$$

وتكون سرعة النقطة C عند الزاوية 50^o هي:

$$V_c = \sqrt{(V_c^x)^2 + (V_c^y)^2} = 52.3599 \text{ cm/s} \tag{5-12}$$

وتكون المركبة A_c^x هي المركبة الأفقية لعجلة النقطة C عند الزاوية $\theta = 50^o$ وقيمتها هي:

$$A_c^x = \omega\,(V_c^{x+} - V_c^{x-})/\,\Delta\theta \tag{5-13}$$

$$= 10.472\,[\,(-40.139 - (-40.081)\,]\,/\,0.0017453 = -352.448 \text{ cm/s}^2$$

وتكون المركبة A_c^y هي المركبة الرأسية لعجلة النقطة C عند الزاوية $\theta = 50^o$ وقيمتها هي:

$$A_c^y = \omega\,(V_c^{y+} - V_c^{y-})/\,\Delta\theta \tag{5-14}$$

$$= 10.472\,[\,33.621 - 33.691]\,/\,0.0017453 = -420.031 \text{ cm/s}^2$$

وتكون عجلة النقطة C عند الزاوية $\theta = 50^o$ هي A_c حيث:

$$A_c = \sqrt{(A_c^x)^2 + (A_c^y)^2} = 548.3112 \text{ cm/s}^2 \tag{5-15}$$

والجدول رقم 1–5 يلخص النتائج السابقة.

جدول رقم 1–5

$\theta^- = 49.9$	49.95	$\theta = 50$		50.05	$\theta^+ = 50.1$
$x_c^- = 3.2206$		$x_c = 3.2139$			$x_c^+ = 3.2072$
	$V_c^{x-} = -40.081$			$V_c^{x+} = -40.139$	
		$V_c^x = -40.11$	$A_c^x = -352.448$		
$y_c^- = 3.8246$		$y_c = 3.8302$			$y_c^+ = 3.8358$
	$V_c^{y-} = 33.691$			$V_c^{y+} = 33.621$	
		$V_c^y = 33.656$	$A_c^y = -420.031$		
		$V_c = 52.3599$	$A_c = 548.3112$		

والجدول رقم 2–5 يبين مقارنة بين نتائج طريقة التفاضل العددي مع القيم الصحيحة للسرعة والعجلة وتأثير قيمة $\Delta\theta$ على دقة نتائج طريقة التفاضل العددي. ويتضح من الجدول أنه يمكن الحصول على نتائج دقيقة بصورة مناسبة مع استعمال $\Delta\theta = 0.1^\circ$.

جدول رقم 2–5

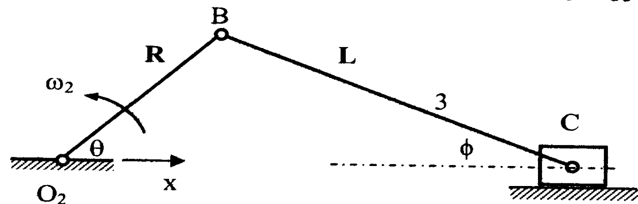
	القيمة الحقيقية	$\Delta\theta = 5^\circ$	3°	1°	0.1°
V_c, cm/s	52.35987	52.29344	52.33595	52.35721	52.35985
A_c, cm/s^2	548.31135	547.96347	548.18609	548.29743	548.31121

5.1.2 تطبيق الطريقة على الآليات:

المثال التالي يوضح تطبيق الطريقة على آلية المنـــزلق.

مثال 2–5

ذراع الدوران O_2B المبين في شكل 2–5 طوله $R = 6$ cm ويدور بسرعة زاوية منتظمة مقدارها $\omega_2 = 100$ rad/s أما ذراع التوصيل BC فطوله $L = 24$ cm . احسب سرعة وعجلة النقطة C وكذلك السرعة والعجلة الزاوية لذراع التوصيل باستعمال طريقة التفاضل العددي وقارن النتائج مع القيم الصحيحة عندما تكون الزاوية $\theta = 65^\circ$.



شكل 2–5

الحل:

من معلومات الفصل الثالث يمكن حساب القيم الصحيحة لسرعة وعجلة النقطة

C كما في الصف الأول من جدول 5–3 . والمعادلتان المستعملتان من الفصل الثالث لهذا الغرض هما المعادلتان 3–1 و 3–2 :

$$\phi = \sin^{-1} \left[\frac{\sin\theta}{n}\right] ; \qquad n = \frac{L}{R} \qquad , \qquad x_c = R\cos\theta + L\cos\phi$$

أما الصفوف الثلاثة التالية في الجدول ففيها نتائج طريقة التفاضل العددي باستعمال $\Delta\theta = 0.1^{\circ}$. والمعادلات المستعملة لهذا الغرض (عندما يدور الذراع بسرعة منتظمة) هي:

$$V_c = \omega_2 \frac{\Delta x_c}{\Delta\theta} \; , \; A_c = \omega_2 \frac{\Delta V_c}{\Delta\theta} \quad , \quad \omega_3 = -\,\omega_2 \frac{\Delta\phi}{\Delta\theta} \quad , \quad \alpha_3 = \omega_2 \frac{\Delta\,\omega_3}{\Delta\theta}$$

والإشارة السالبة في معادلة ω_3 سببها هو أن الزيادة الموجبة في قيمة الزاوية ϕ تكون بدوران الذراع BC في اتجاه عقرب الساعة بينما الزيادة الموجبة في قيمة ω_3 تكون بدوران الذراع BC عكس اتجاه عقرب الساعة ، مما يعني أن الزيادة في قيمة الزاوية ϕ يؤدي إلى نقص في قيمة ω_3 .

الصف الثاني في الجدول يبين النتائج التي تم الحصول عليها باستعمال برنامج لوتس على الكمبيوتر وهي تتطابق مع النتائج الصحيحة . أما الصف الثالث فيبين نتائج استعمال برنامج فورتران FORTRAN مع دقة عادية. ويلاحظ أن ذلك يؤدي إلى بعض الخطأ في A_c , α_3 . وقد تم علاج هذه الأخطاء باستعمال برنامج فورتران مع دقة مضاعفة كما هو مبين في الصف الرابع من الجدول.

جدول رقم 5–3

V_c cm/s	A_c cm/s^2	ω_3 rad/s	α_3 rad/s^2	
−602.772	−15 606.7	−10.8476	2 298.894	Equations of chapter 3
−602.772	−15 606.7	−10.8476	2 298.894	Lotus Results
−602.806	−12 523.0	−10.8478	2 299.153	Fortran single precision
−602.772	−15 606.7	−10.8476	2 298.894	Fortran double precision

ويبين جدول 5–4 برنامج بلغة فورتران مع دقة مضاعفة لحساب سرعة وعجلة النقطة المنـــزلق C وكذلك السرعة والعجلة الزاوية لذراع التوصيل.

جدول 4–5

برنامج لحل مثال 2–5 باستعمال طريقة التفاضل العددي

```
c Program to calculate the velocity and acceleration of the slider , and the angular  velocity and angular
c      acceleration of the connecting rod in a crank--slider mechanism using numerical differentiation.
c         The crank rotates at constant angular velocity .

      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real*8    th(3),x(3),ph(3)
c ------------------------         Input    --------------------
      r=6
      L=24
      w=100
      th(2)=65
      delta=0.1
c ----------------------------------------------------------

      D2R=3.141592653589793/180
      delta=delta*D2R
      th(2)=th(2)*D2R
      th(1)=th(2)-delta
      th(3)=th(2)+delta

        do 11 i=1,3
           ph(i) = dasin(r/L*sin(th(i)))
           x(i) = r * dcos(th(i)) + L * dcos (ph(i))

11    continue

      v2=(x(3)-x(2))*w/delta
      v1=(x(2)-x(1))*w/delta
      v=(v2+v1)/2
      A=(v2-v1)*w/delta
      w3u= -(ph(3)-ph(2))*w/delta
      w3L= -(ph(2)-ph(1))*w/delta
      w3  =(w3u+w3L)/2
      a3  = (w3u - w3L)*w/delta

      write(*,*)   x(2) , v , A , w3 , a3
      end
```

5.1.3 الدوران بسرعة غير منتظمة: Effect of crank acceleration

جميع المعادلات والأمثلة السابقة كان يتم فيها إجراء عملية التفاضل بالنسبة إلى حركة ذراع يدور بسرعة منتظمة. أما إذا كان الذراع يدور بسرعة متغيرة فيلزم أخذ العجلة في الاعتبار عند إجراء عملية التفاضل بالنسبة للزمن. فإذا كان إحداثي نقطة

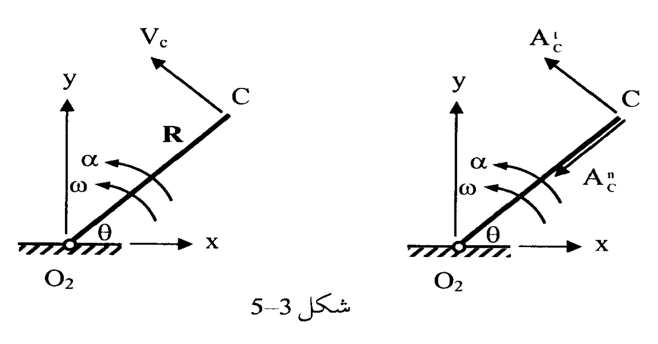
معينة مثل C هو x_c فتكون سرعتها V_c وعجلتها A_c هما:

$$V_c = \omega\,\frac{\Delta x_c}{\Delta\theta}\ ,\quad A_c = \omega\,\frac{\Delta V_c}{\Delta\theta} + \frac{\alpha}{\omega}\,V_c \qquad (5\text{–}16)$$

حيث ω هي السرعة الزاوية وحيث α هي العجلة الزاوية. والمثال التالي يوضح الطريقة.

مثال 3–5

الذراع O_2C المبين في شكل 3–5 طوله R=5 cm ويدور بسرعة زاوية $\omega = 100$ rev/min وبعجلة زاوية $\alpha = 80\ rad/s^2$ احسب سرعة وعجلة النقطة C باستعمال طريقة التفاضل العددي وقارن النتائج مع القيم الصحيحة عندما تكون الزاوية $\theta = 60^o$.



شكل 3–5

الحل:

من معلومات الفصل الأول يمكن حساب القيم الصحيحة لسرعة وعجلة النقطة C كما يلي:

$\omega = 100(2\pi/60) = 10.472$ rad/s

$V_c = \omega\, R = (10.472)(5) = 52.3599$ cm/s

$A_c^n = \omega^2\, R = (10.472)^2(5) = 548.31\ cm/s^2$

$A_c^t = \alpha\, R = 80(5) = 400\ cm/s^2$

$$A_c = \sqrt{(A_c^x)^2 + (A_c^y)^2} = 678.7086 \text{ cm/s}^2$$

المعادلات (1–5) إلى (12–5) الخاصة بحساب السرعة V_c باستخدام التفاضل العددي تنطبق هنا كما في مثال 1–5 بدون تغيير. ولإيجاد العجلة يتم تطبيق المعادلة (16–5) مرة في اتجاه x ومرة أخرى في اتجاه y . والجدول رقم 5–5 يبين النتائج (يراعى عدم التقريب عند الحساب لأن أي تقريب في الحسابات قد يؤثر تأثيرا كبيرا على النتائج كما ناقشنا ذلك في مثال 1–5).

جدول رقم 5–5

$\theta^- = 59.9°$	59.95°	$\theta = 60°$		60.05°	$\theta^+ = 60.1°$
$x_c^- = 2.507553$		$x_c = 2.5$			$x_c^+ = 2.492438$
	$V_c^{x-} = -45.32211$			$V_c^{x+} = -45.36780$	
		$V_c^x = -45.34496$	$A_c^x = -620.56559$		
$y_c^- = 4.325757$		$y_c = 4.33012701$			$y_c^+ = 4.334483$
	$V_c^{y-} = 26.21949$			$V_c^{y+} = 26.14035$	
		$V_c^y = 26.17992$	$A_c^y = -274.85154$		
		$V_c = 52.35985$	$A_c = 678.7084$		

وهذه النتائج تتفق مع النتائج الصحيحة.

مثال 4–5

شكل (a)4–5 يبين جزء من آلية المكشطة التي درست في الفصل الثاني [1]. الذراع الدوار O_2C طوله R=10 cm ويدور بسرعة زاوية $\omega_2 = 360$ rev/min وبعجلة زاوية $\alpha_2 = 30$ rad/s^2 . احسب السرعة والعجلة الزاوية للذراع 4 وكذلك سرعة وعجلة النقطة D باستعمال طريقة التفاضل العددي عندما تكون الزاوية $\theta_2 = 45°$.

الحل: (ملحوظة: جدول 7–5 يحتوي على برنامج مكتوب بلغة فورتران والذي يمكن استعماله لإجراء الحسابات لهذا المثال وكذلك مثال 5–5)

(١)مثال 11–6 يحتوي على حل كامل للآلية.

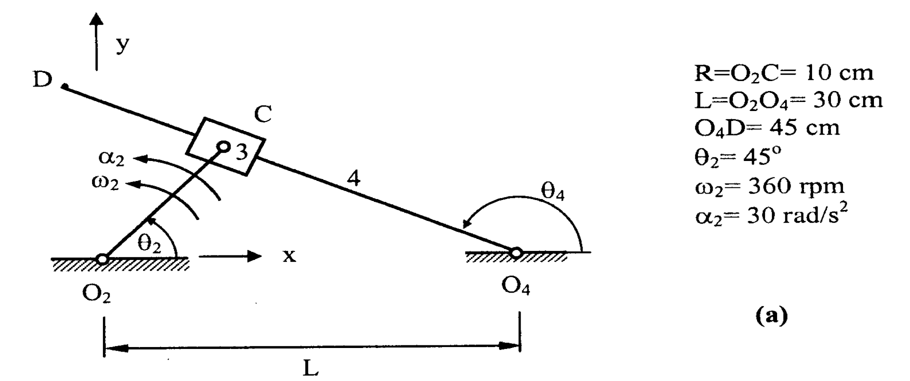
يرمز للطول O_4C بالرمز z وللطول O_2C بالرمز R. ومن المثلث O_4CO_2 يكون

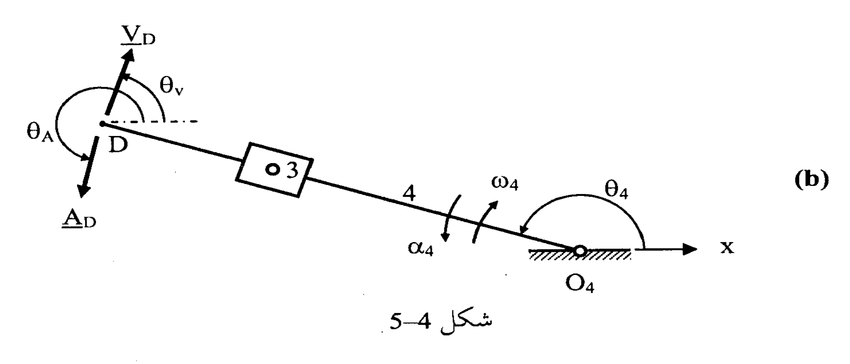
$$z = \sqrt{R^2 + L^2 - 2RL\cos\theta_2} \qquad (5\text{–}17)$$

$$\theta_4 = 180^\circ - \sin^{-1}\left(\frac{R\sin\theta_2}{z}\right) \qquad (5\text{–}18)$$

والجدول الآتي يبين نتائج التفاضل العددي لهاتين المعادلتين.

z, cm	z* ,cm/s	z** , cm/s^2	θ_4	ω_4 rad/s	α_4 rad/s^2
23.994	333.29	8200.5	162.860°	−7.3423	721.788





شكل 4–5

والقيمتان *z**, z تمثلان معدل ابتعاد المنـــزلق عن محور الدوران O_4 وعجلة

هذا الابتعاد وستتم مناقشة معناهما في المثال التالي حيث سيتضح أن z^* هي السرعة الظاهرية للمنـــزلق وهي تمثل سرعته كما تظهر لشخص مثبت في (ويتحرك مع) الذراع 4 ، وأن z^{**} هي جزء من العجلة الظاهرية للمنـــزلق.

ولإيجاد سرعة وعجلة النقطة D نوجد إحداثياتها أولا (O_4 هي نقطة الأصل):

$x_D = -(O_4D)\cos(180-\theta_4)\ ,\quad y_D = (O_4D)\sin(180-\theta_4) = (O_4D)\sin(\theta_4)$

وبإجراء عملية التفاضل العددي بالنسبة للزمن لهاتين المعادلتين كما في المثال السابق نحصل على النتائج التالية.

$V_d^x = 97.36$ cm/s $\quad V_d^y = 315.73 \quad V_d = 330.40 \quad \theta_V = 72.86°$

$A_d^x = -7253.59$ cm/s$^2 \quad A_d^y = -31753.00 \quad A_d = 32570.97 \quad \theta_A = 257.1°$

والزوايا θ_V و θ_A تقاس من المحور x عكس اتجاه عقرب الساعة كما هو مبين في شكل 5–4(b).

ملحوظة: الأمثلة 6–9 و 6–10 و 6–11 هي تطبيقات إضافية على طريقة التفاضل العددي.

مثال 5–5[١]

في شكل 5–4 احسب السرعة والعجلة الظاهرية للمنـــزلق (الضلع 3) وفرق بين العجلة الظاهرية وبين العجلة التي يراها شخص ملتصق مع الذراع O_4D ويتحرك معه، وذلك باستعمال طريقة التفاضل العددي.

الحل: (ملحوظة: جدول 5–7 يحتوي على برنامج مكتوب بلغة فورتران والذي يمكن استعماله لإجراء الحسابات لهذا المثال وكذلك مثال 5–4)

إذا التصق شخص مع الذراع O_4D وتحرك معه فإنه يرى المنـــزلق يتحرك فقط على طول الخط O_4D وهذه الحركة هي الحركة الظاهرية للمنـــزلق. والآن نركز

---

(١) هذا المثال يشرح العجلة الظاهرية ومركبة كوريولس Coriolis ولكن المثال والمناقشة التي يحتويهـــا ليـــست أساسية لموضوع الفصل الحالي وهو الطرق العددية ولذلك فربما يفضل بعض القراء الانتقال مباشرة إلى الفقرة التالية والعودة إلى هذا المثال فيما بعد عند ظهور الحاجة لدراسة الحركة الظاهرية، وأكثر ما تظهر هذه الحاجة هي عند إيجاد العجلات بيانيا باستعمال طريقة مضلع العجلة كما هو معروض في الفصل التاسع.

اهتمامنا على النقطة C_3 وهذه النقطة هي جزء لا يتجزأ من المنـــزلق ثابتة فيه وتتحرك معه (انظر أيضا شكل 5–5). ولابد من التفرقة بين هذه النقطة (أي C_3) وبين نقطة أخرى هي C_4 منطبقة على C_3 في اللحظة المبينة بالرسم ولكنها جزء لا يتجزأ من الذراع 4 . وبعد مرور فترة زمنية قصيرة ، تتحرك C_3 مع المنـــزلق بينما تتحرك C_4 مع الذراع 4 وتنفصل النقطتان عن بعضهما. ويمكن إيجاد سرعة النقطة C_3 بإيجاد إحداثياتها وملاحظة أن $O_2C_3= R$

$$x_{C_3} = (R)\cos(\theta_2)\ ,\ y_{C_3} = (R)\sin(\theta_2)$$

وبإجراء عملية التفاضل العددي لهاتين المعادلتين بالنسبة للزمن مرتين نحصل على مركبات السرعة V_{C_3} ومركبات العجلة A_{C_3} كما في جدول 6–5.

وبالمثل يمكن إيجاد سرعة النقطة C_4 بإيجاد إحداثياتها وملاحظة أن $O_4C_4= z$:

$$x_{C_4} = -(z)\cos(180-\theta_4)\ ,\ y_{C_4} = (z)\sin(180-\theta_4) = (z)\sin(\theta_4)$$

وبإجراء عملية التفاضل العددي بالنسبة للزمن لهاتين المعادلتين مرتين نحصل على مركبات السرعة V_{C_4} ومركبات العجلة A_{C_4} كما في جدول 6–5.

جدول 6–5

	V_c^x	V_c^y	V_c	θ_v	A_c^x	A_c^y	A_c	θ_A
C_3	–266.573	266.573	376.991	135	–10261.7	–9837.43	14215.39	223.791
C_4	51.9184	168.353	176.177	72.861	–3867.69	–16931.1	17367.2	257.132

ويوضح شكل 5–5 اتجاه السرعتين $V_{C_3} = 376.991$ cm/s و $V_{C_4}= 176.177$ cm/s ، وهاتان السرعتان عموما مختلفتان مقدارا واتجاها رغم التطابق اللحظي بين C_4 , C_3 . والفرق بين السرعتين يسمى **السرعة الظاهرية** apparent velocity ويرمز له بالرمز $\underline{V}_{C_{3/4}}$ ويحسب من المعادلة:

$$\underline{V}_{C_{3/4}} = \underline{V}_{C_3} - \underline{V}_{C_4} \tag{5–19}$$

$$= (-266.573\,\underline{i} + 266.573\,\underline{j}) - (51.9184\,\underline{i} + 168.353\,\underline{j}) = -318.491\,\underline{i} + 98.2195\,\underline{j}$$

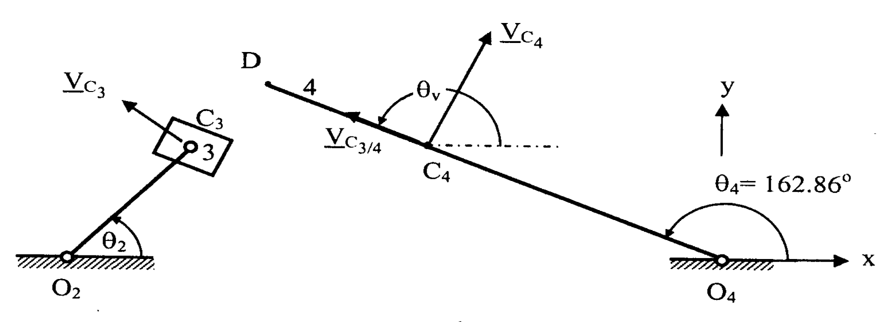
ومقدار السرعة الظاهرية $V_{C_{3/4}}$ وزاويتها θ_v مع المحور x هما:

$$V_{C_{3/4}} = (318.491^2 + 98.2195^2)^{0.5} = 333.292 \text{ cm/s}$$

$$\theta_v = \tan^{-1}(98.2195/-318.491) + 180 = 162.86^{\circ}$$

وقد أضيفت $180°$ عند حساب θ_v بسبب أن المركبة الأفقية للسرعة سالبة.

ويوضح شكل 5-5 أيضا هذه السرعة الظاهرية $V_{C_{3/4}}$ وهي تمثل سرعة النقطة C_3 (التي هي جزء من المنــــزلق) كما تظهر لشخص مثبت في (ويتحرك مع) الذراع 4. وهذه السرعة الظاهرية تكون في اتجاه انزلاق النقطة C_3 على الذراع ، أي على طول الخط O_4D . وقد تم في المثال السابق حساب الكمية z^* باستعمال التفاضل العددي بالنسبة للزمن وهذه الكمية هي نفسها السرعة الظاهرية $V_{C_{3/4}}$.



شكل 5-5

ويوضح شكل 6-5 رسما تخطيطيا لاتجاه العجلتين (A_{C_3} = 14215.39 cm/s²) و (A_{C_4}= 17367.2 cm/s²) ، وهاتان العجلتان عموما مختلفتان مقدارا واتجاها رغم التطابق اللحظي بين C_3 و C_4 . والفرق بين العجلتين يسمى **العجلة الظاهرية** apparent acceleration ويرمز له بالرمز $\underline{A}_{C_{3/4}}$ ويحسب من المعادلة:

$$\underline{A}_{C_{3/4}} = \underline{A}_{C_3} - \underline{A}_{C_4} \tag{5-20}$$

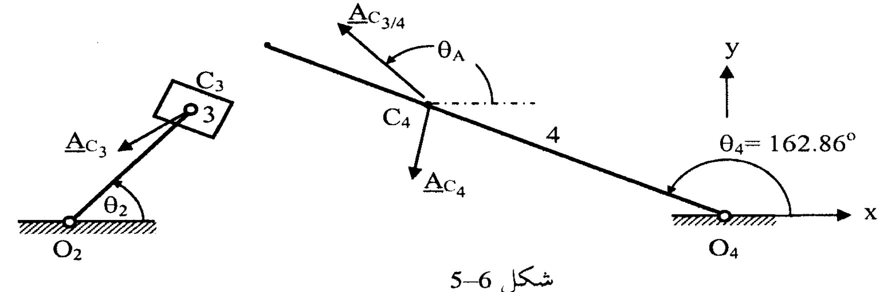
$$= (-10261.7\ \underline{i} - 9837.43\ \underline{j}) - (-3867.69\ \underline{i} - 16931.1\ \underline{j}) = -6394\ \underline{i} + 7093.623\ \underline{j}$$

ومقدار العجلة الظاهرية $A_{C_{3/4}}$ وزاويتها θ_A مع المحور x هما:

$$A_{C_{3/4}} = (6394^2 + 7093.623^2)^{0.5} = 9550.011\ \text{cm/s}^2$$

$$\theta_A = \tan^{-1}(7093.623/-6394) + 180 = 132.03°$$

وهذا هو المطلوب. ولكننا سنستطرد في المناقشة لإثبات العلاقة بين z^{**} وبين العجــــلة الظاهرية.



شكل 6–5

فشكل 6–5 يوضح أيضا هذه العجلة الظاهرية $\underline{A}_{C_{3/4}}$. وهذه العجلة الظاهرية <u>ليست</u> في اتجاه انزلاق النقطة C_3 على الذراع كما كان الحال في حالة السرعة الظاهرية ، بل إنها تتصل بالعجلة z^{**} (وهي تمثل عجلة النقطة C_3 التي هي جزء من المنـــزلق كما تظهر لشخص مثبت في ويتحرك مع الذراع 4) بالعلاقة:

$$\underline{A}_{C_{3/4}} = \underline{z}^{**} + \underline{A}^{c}_{C_3C_4} \qquad (5\text{–}21)$$

حيث المقدار $A^{c}_{C_3C_4}$ هو عجلة كوريولس Coriolis acceleration وتظهر عند دراسة حركة جسمين متحركين بالنسبة لبعضهما مثل انزلاق النقطة C_3 على الذراع 4 في المسألة الحالية ، واتجاهها دائما عموديا على المسار الظاهري للنقطة C_3 على الذراع. وتحسب $A^{c}_{C_3C_4}$ من المعادلة التالية والتي سيتم إثباتها في ملحق الفصل التاسع.

$$A^{c}_{C_3C_4} = 2\,\omega_4\,V_{C_{3/4}} \qquad (5\text{–}22)$$

$$= 2(7.3423)(333.292) = 4894.325\ \text{cm/s}^2$$

وتكون $\underline{A}^{c}_{C_3C_4}$ عمودية على السرعة الظاهرية $\underline{V}_{C_{3/4}}$ وتحدد ω_4 اتجاهها كما هو مبين في شكل 7–5. وعلى هذا يمكن تحليلها إلى المركبات الأفقية والرأسية وكتابتها في صورة المتجه الآتي.

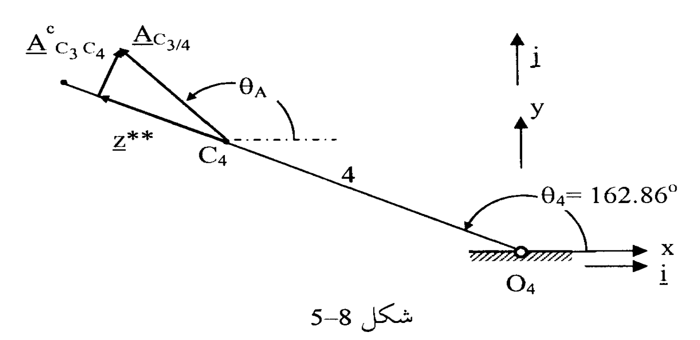
$\underline{A}^{c}_{C_3C_4}$
ω_4
$\underline{V}_{C_{3/4}}$

شكل 7–5

$\underline{A}^{c}_{C_3C_4} = 4894.325\ [\cos(\theta_4 - 90)\ \underline{i} + \sin(\theta_4 - 90)\ \underline{j}\ ] = 1442.335\ \underline{i} - 4676.974\ \underline{j}$

ويوضح شكل 8-5 رسما تخطيطيا للمعادلة (21-5). وقد تم حساب قيمة z^{**} في المثال السابق ووجدت تساوي $8200.5\ cm/s^2$. وعلى هذا يمكن تحليلها إلى المركبات الأفقية والرأسية وكتابتها في صورة المتجه الآتي:

$$\underline{z}^{**} = 8200.5\ [-\cos(180-\theta_4)\ \underline{i} + \sin(\theta_4)\ \underline{j}\ ] = -7836.328\ \underline{i} + 2416.65\ \underline{j}$$



شكل 8-5

وبالتعويض في المعادلة (21-5) نحصل على العجلة الظاهرية $\underline{A}_{C3/4}$

$$\underline{A}_{C3/4} = (-7836.328\ \underline{i} + 2416.65\ \underline{j}) + (1442.335\ \underline{i} - 4676.974\ \underline{j})$$
$$= -6393.992\ \underline{i} + 7093.624\ \underline{j}$$

ومقدار العجلة الظاهرية $A_{C_3/4}$ هو:

$$A_{C_3/4} = (6393.992^2 + 7093.624^2)^{0.5} = 9550.0\ cm/s^2$$

وزاويتها θ_A مع المحور x هي:

$$\theta_A = \tan^{-1}(7093.624 - 6393.992) + 180 = 132.03^o$$

وهي نفس القيم التي حصلنا عليها من تطبيق المعادلة (20-5) وهذا إثبات صحة المعادلتين (22-5) , (21-5). وتجدر الإشارة مرة أخرى هنا أن عجلة كوريولس لا يشعر بها شخص مثبت في (ويتحرك مع) الذراع 4 ، وإنما يشعر هذا الشخص بجزء فقط من العجلة الظاهرية (أي $\underline{z}^{**}$) وهو يمثل معدل تغير سرعة ابتعاد المنـــزلق على طول الذراع.

جدول 7-5

برنامج لحل أمثلة 4-5 , 5-5 باستعمال طريقة التفاضل العددي

```
c Program to solve example 5-4 &5-5 using numerical differentiation

    implicit real*8 (a-h,o-z)
    real*8  L,th2(3),z(3),th4(3),xd(3),yd(3),xc4(3),yc4(3),
   +        xc3(3),yc3(3)
    OPEN(6,FILE='ex5-5.OUT',STATUS='unknown')
c -------------------------     Input   ------------------
    r=10
    L=30
    O4D=45
    w2=360
    a2=30
    th2(2)=45
    delta=0.1

    write(6,*)  'R,L,O4D,theta2,w2(rev/s),a2 '
    write(6,99)  r,L,O4D, th2(2) ,w2,a2
99   format(9(f7.2,1x))
c ------------------------------------------------------------
    pi= 4*datan(1)
    D2R=pi/180
c Convert angles to radians, and speed w2 to ras/s
    delta=delta*D2R
    th2(2)=th2(2)*D2R
    th2(1)=th2(2)-delta
    th2(3)=th2(2)+delta
    w2=w2*pi/30
c Calculation of z,theta4
       do 11 i=1,3
          z(i) = (r**2+L**2-2*r*L*dcos(th2(i)))**0.5
          th4(i) = pi - dasin(r/z(i)*dsin(th2(i)))
 11    continue

    zs2=(z(3)-z(2))*w2/delta
    zs1=(z(2)-z(1))*w2/delta
    zs=(zs2+zs1)/2
    zss=(zs2-zs1)*w2/delta + a2/w2*zs
    w4u=(th4(3)-th4(2))/delta
    w4L=(th4(2)-th4(1))/delta
    w4  =(w4u+w4L)/2 *w2
    a4  = (w4u - w4L)*w2**2/delta + a2/w2*w4
    th2Deg=th2(2)/D2R
    th4Deg=th4(2)/D2R
    write(6,*)  'theta2 ,  z, z* , z** , theta4, w4 , a4   ,w2,a2 '
    write(6,99)  th2Deg ,  z(2), zs , zss , th4Deg, w4 , a4   ,w2,a2

c Calculation of velocity & acceleration of point D
```

```
        do 22 i=1,3
           xd(i) = -O4D*dcos(pi-th4(i))
           yd(i) = O4D*dsin(th4(i))
 22     continue

      vxd2=(xd(3)-xd(2))*w2/delta
      vxd1=(xd(2)-xd(1))*w2/delta
      vxd=(vxd2+vxd1)/2
      Axd=(vxd2-vxd1)*w2/delta + a2/w2*vxd

      vyd2=(yd(3)-yd(2))*w2/delta
      vyd1=(yd(2)-yd(1))*w2/delta
      vyd=(vyd2+vyd1)/2
      Ayd=(vyd2-vyd1)*w2/delta + a2/w2*vyd

      vd=(vxd**2+vyd**2)**0.5
      thv=datan(vyd/vxd)/D2R
      if(vxd.lt.0) thv=thv+180

      Ad=(Axd**2+Ayd**2)**0.5
      thA=datan(Ayd/Axd)/D2R
      if(Axd.lt.0) thA=thA+180

      write(6,*)  'vxd,vyd,vd,thv,  Axd,Ayd,Ad,thA '
      write(6,888)  vxd,vyd,vd,thv,Axd,Ayd,Ad,thA
888   format(4(f7.2,1x),4(f9.2,1x))

c Calculation of velocity & acceleration of point C4
        do 44 i=1,3
           xc4(i) = -z(2)*dcos(pi-th4(i))
           yc4(i) = z(2)*dsin(th4(i))
44      continue

      vxc42=(xc4(3)-xc4(2))*w2/delta
      vxc41=(xc4(2)-xc4(1))*w2/delta
      vxc4=(vxc42+vxc41)/2
      Axc4=(vxc42-vxc41)*w2/delta + a2/w2*vxc4

      vyc42=(yc4(3)-yc4(2))*w2/delta
      vyc41=(yc4(2)-yc4(1))*w2/delta
      vyc4=(vyc42+vyc41)/2
      Ayc4=(vyc42-vyc41)*w2/delta + a2/w2*vyc4

      vc4=(vxc4**2+vyc4**2)**0.5
      thv=datan(vyc4/vxc4)/D2R
      if(vxc4.lt.0) thv=thv+180

      Ac4=(Axc4**2+Ayc4**2)**0.5
      thA=datan(Ayc4/Axc4)/D2R
      if(Axc4.lt.0) thA=thA+180

      write(6,*)  ' vxc4,vyc4,vc4,thv,Axc4,Ayc4,Ac4,thA'
      write(6,888)  vxc4,vyc4,vc4,thv,Axc4,Ayc4,Ac4,thA
```

```
c Calculation of velocity & acceleration of point C3
      do 33 i=1,3
         xc3(i) = r*dcos(th2(i))
         yc3(i) = r*dsin(th2(i))
33    continue

    vxc32=(xc3(3)-xc3(2))*w2/delta
    vxc31=(xc3(2)-xc3(1))*w2/delta
    vxc3=(vxc32+vxc31)/2
    Axc3=(vxc32-vxc31)*w2/delta + a2/w2*vxc3

    vyc32=(yc3(3)-yc3(2))*w2/delta
    vyc31=(yc3(2)-yc3(1))*w2/delta
    vyc3=(vyc32+vyc31)/2
    Ayc3=(vyc32-vyc31)*w2/delta + a2/w2*vyc3

    vc3=(vxc3**2+vyc3**2)**0.5
    thv=datan(vyc3/vxc3)/D2R
    if(vxc3.lt.0) thv=thv+180

    Ac3=(Axc3**2+Ayc3**2)**0.5
    thA=datan(Ayc3/Axc3)/D2R
    if(Axc3.lt.0) thA=thA+180

    write(6,*)  ' vxc3,vyc3,vc3,thv,Axc3,Ayc3,Ac3,thA'
    write(6,888)  vxc3,vyc3,vc3,thv,Axc3,Ayc3,Ac3,thA

c Calculation of apparent velocity Vc3/4 & acceleration Ac3/4
    vxc3_4=vxc3-vxc4
    vyc3_4=vyc3-vyc4
    vc3_4=(vxc3_4**2+vyc3_4**2)**0.5
    thv=datan(vyc3_4/vxc3_4)/D2R
    if((vxc3_4).lt.0) thv=thv+180

    Axc3_4=Axc3-Axc4
    Ayc3_4=Ayc3-Ayc4
    Ac3_4=(Axc3_4**2+Ayc3_4**2)**0.5
    thA=datan(Ayc3_4/Axc3_4)/D2R
    if((Axc3_4).lt.0) thA=thA+180

    write(6,*)  '  vxc3_4,vyc3_4,vc3_4,thv,Axc3_4,Ayc3_4,Ac3_4,thA'
    write(6,888)  vxc3_4,vyc3_4,vc3_4,thv,Axc3_4,Ayc3_4,Ac3_4,thA
    end
```

5.2 طريقة نيوتن مع معادلة واحدة غير خطية

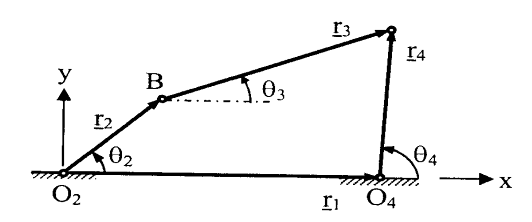
Newton–Raphson method for one non–linear equation

تنتج في بعض الآليات معادلات موضع غير خطية في الكميات المجهولة ولذلك يصعب حلها تحليليا ويكون اللجوء إلى الطرق العددية لحل هذه المعادلات غير الخطية

أحد الخيارات الفعالة. وفي هذا الجزء سنعرض مثالا لآلية الأضلاع الأربعة والتي يمكن في حالتها اختصار المعادلات إلى معادلة واحدة غير خطية يتم حلها عدديا باستعمال طريقة نيوتن–رافسون.

5.2.1 معادلة فرويدنستين Freundenstein's للآلية الرباعية

يبين شكل 9–5 آلية الأضلاع الأربعة حيث أطوال الأضلاع معلومة وكذلك سرعة وعجلة العمود الدوار O_2B، والمطلوب تحليل موضع وسرعة وعجلة الأضلاع الباقية.



شكل 9–5

ولأن هذه الآلية تكون حلقة مقفلة فإنه يمكن إسقاط أطوال أضلاع الآلية الأربعة على محوري x , y (لاحظ أن محور x ينطبق على خط المراكز O_2O_4 وهو ليس بالضرورة أفقيا، وأن محور y عمودي على محور x). فتكون المركبات في اتجاه محور x للآلية المبينة في شكل 9–5 هي:

$$r_1 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_4 \cos \theta_4 \qquad \text{(a)}$$

وتكون المركبات في اتجاه محور y هي:

$$r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 = 0.0 \qquad \text{(b)}$$

والكميتان المجهولتان في هاتين المعادلتين هما θ_4 , θ_3 ولكن المعادلتين هما من النوع المعضل transcendental الذي لا يمكن حله مباشرة لإيجاد المجهولين. ولكن يمكن حذف θ_3 بإعادة ترتيب المعادلتين ثم تربيع الطرفين كما يلي:

$$(r_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2)^2 = (r_3 \cos \theta_3)^2 \qquad \text{(c)}$$

$$(r_2 \sin \theta_2 - r_4 \sin \theta_4)^2 = (-r_3 \sin \theta_3)^2 \qquad \text{(d)}$$

والآن بفك الطرف الأيسر في كل معادلة ثم جمع المعادلتين الناتجتين وملاحظة أن

$\sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

نحصل على:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - 2 r_1 r_2 \cos \theta_2 + 2 r_1 r_4 \cos \theta_4 - 2 r_2 r_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) - r_3^2 = 0.0 \qquad \text{(e)}$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة في الصورة:

$$Q + S \cos \theta_2 + U \cos \theta_4 + E \cos (\theta_2 - \theta_4) = 0.0 \qquad (5\text{–}23)$$

حيث الثوابت هي:

$$Q = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 , \quad S = -2 r_1 r_2 , \quad U = 2 r_1 r_4 , \quad E = -2 r_2 r_4 \qquad (5\text{–}24)$$

وتعرف المعادلة (23–5) بمعادلة فرويدنستين[1] Freundenstein's equation وقد نشرها عام 1955 وهي تمثل أحد أسس استنباط الآلية الرباعية تحليليا analytical synthesis. وهذه المعادلة هي معادلة غير خطية في المجهول θ_4 وسيتم مناقشة كيفية حلها عدديا باستعمال طريقة نيوتن–رافسون بعد تقديم ملخص موجز عن هذه الطريقة في الجزء التالي.

بعد إيجاد θ_4 كما سنشرح فيما بعد يمكن إيجاد θ_3 من المعادلة (a):

$$\theta_3 = \cos^{-1} ((r_1 - r_2 \cos \theta_2 + r_4 \cos \theta_4) / r_3) \qquad (5\text{–}25)$$

5.2.2 طريقة نيوتن–رافسون لحل معادلة غير خطية

Newton–Raphson Method for One Non–linear Equation

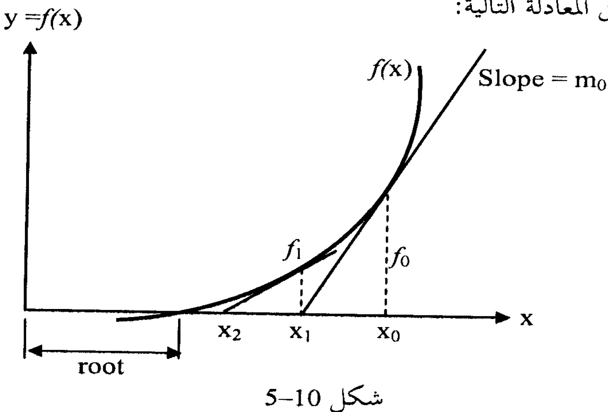
تستعمل الطريقة لحل معادلة في الصورة $f(x) = 0$ وذلك بإيجاد جذور المعادلة roots ، والمقصود بالجذر هو قيمة x التي تحقق المعادلة. وتبدأ الخطوات باختيار قيمة مبدئية x_0 للجذر المجهول وحساب f_0 قيمة الدالة عندها كما هو مبين في شكل 5-10. ويحسب ميل المماس m_0 للدالة عند x_0 وذلك بإجراء عملية التفاضل للدالة بالنسبة للمجهول x. ثم تحسب قيمة جديدة x_1 للجذر عن طريق العلاقة $m_0 = f_0 / (x_0 - x_1)$ والتي تمكن إعادة ترتيبها كالآتي:

---

(١) انظر Shigley صفحة 346 وكذلك Mabie صفحة 552.

$$x_1 = x_0 - \frac{f_0}{m_0} \quad ; \quad m_0 = \left(\frac{df}{dx}\right)_{at\, x_0} \qquad \text{(f)}$$

ثم تكرر العملية بحيث تستعمل x_1 لإيجاد قيمة جديدة للدالة f_1 وكذلك للمشتقة m_1 . ثم تحسب قيمة جديدة x_2 للجذر، كما هو مبين في شكل 5-10 ، عن طريق المعادلة التالية:



شكل 5-10

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f_i}{m_i} \quad ; \quad m_i = \left(\frac{df}{dx}\right)_{at\, x_i} \qquad (5\text{–}26)$$

وتستمر عملية التكرار iteration حتى نصل إلى قيمة الجذر المنشودة.

وقد لاقت طريقة نيوتن-رافسون نجاحا في تطبيقات كثيرة في الهندسة والتكنولوجيا ولكن نجاحها ليس مضمونا في كل الحالات وقد تفشل في الوصول إلي الجذر إذا كانت القيمة التقريبية الأولية x_0 بعيدة جدا عن الجذر أو كانت الدالة نفسها تتغير مشتقتها تغييرات كبيرة في مدى قصير.

5.2.3 تطبيق الطريقة على الآلية الرباعية

المعادلة (5-23) والمعروفة بمعادلة فرويدنستين هي معادلة غير خطية في المجهول θ_4 يمكن حلها عدديا باستعمال طريقة نيوتن-رافسون. وتبدأ عملية الحسابات المتكررة iterations باختيار قيمة تجريبية للمجهول θ_4 ، وهذه القيمة المبدئية θ_{4_0} قد تؤخذ

بالتخمين أو من رسم الآلية في أحد أوضاعها وقياس الزاوية ، ثم تستعمل القيمة التي تنتج من برنامج الكمبيوتر كقيمة مبدئية في الأوضاع الأخرى للآلية. والمثال التالي يبين تطبيق الطريقة.

مثال 5–6

شكل 5–11 يبين آلية رباعية function generator تستعمل لتوليد حركة دائرية طبقا للمعادلة $y = 0.78\ x^{0.8}$ وذلك في المدى $1.4 < x < 3.4$ ، حيث x هي الزاوية θ_2 في شكل 5–11 بينما y هي الزاوية θ_4 . تحقق من هذا الزعم بتحليل الحركة وبين النتائج في رسم بياني.

الأبعاد هي: $r_1 = 1.6, r_2 = 1.5, r_3 = 4.6, r_4 = 4.8$ حيث وحدات الطول اختيارية بحيث يمكن تصغير أو تكبير الآلية حسب الفراغ المتاح.

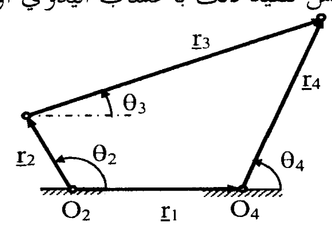
الحل:

الكمية x تمثل زاوية دوران الضلع الدوار crank r_2 وهي الزاوية θ_2 في شكل 5–11 بينما y تمثل θ_4 وهي زاوية دوران الضلع r_4 حيث تقاس كل من θ_2 و θ_4 بالزاوية الدائرية radian. فيكون المــدى $1.4 < x < 3.4$ مكافئا للمــدى $80^o < \theta_2 < 195^o$.

وتكون معادلة فرويدنستين المطلوب حلها هي:

$$f = Q + S\cos\theta_2 + U\cos\theta_4 + E\cos(\theta_2 - \theta_4) \qquad (5\text{–}23)'$$

والمطلوب هو إيجاد θ_4 التي تجعل $f = 0$. ويتم تحقيق هذا باستعمال طريقة نيوتن–رافسون. وسنناقش تنفيذ ذلك بالحساب اليدوي أولا عند الزاوية $\theta_2 = 80^o$:



شكل 5–11

لبيان سرعة اقتراب الطريقة من الحل الصحيح سنبدأ بقيمة تجريبية للمجهول θ_4 هي ($\theta_{4_0} = 100^o$) وهي بعيدة تماما عن القيمة الصحيحة ، ثم نحسب f من المعادلة '(5–23) وكذلك نحسب ميل المماس ($m = \frac{df}{d\theta_4}$) عند الزاوية θ_{4_0} ولذلك نرمز له بالرمز m_0 وذلك بإجراء عملية التفاضل بالنسبة للزمن للمعادلة '(5–23) لنحصل على:

$$m = \frac{df}{d\theta_4} = -U \sin\theta_4 + E \sin(\theta_2 - \theta_4) \qquad (5\text{–}27)$$

ثم نحسب θ_{4_1} من المعادلة (5–26) حيث ($\theta_{4_1} = \theta_{4_0} - \frac{f_0}{m_0}$). تعاد الخطوات التكرارية حتى تستقر قيمة θ_4 .

ويعطي الجدول رقم 5–8 تفاصيل الحسابات التي تظهر الوصول إلى الحل الصحيح بعد أربعة تكرارات فقط رغم أن القيمة التخمينية كانت بعيدة عن القيمة الصحيحة. وكمثال على الحسابات التي أجريت في أول محاولة first iteration :

$\theta_2 = 80^o = 80*\pi/180 = 1.396$ rad , $\theta_{4_0} = 100^o = 1.745$ rad

$Q = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 = 6.69$

$S = -2\, r_1\, r_2 = -4.8$

$U = 2\, r_1\, r_4 = 15.36$

$E = -2\, r_2\, r_4 = -14.4$

وبالتعويض في المعادلة '(5–23)

$$f = 6.69 - 4.8 \cos\theta_2 + 15.36 \cos\theta_4 - 14.4 \cos(\theta_2 - \theta_4) \qquad (i)$$

وبالتعويض في المعادلة (5–27)

$$\frac{df}{d\theta_4} = -U \sin\theta_4 + E \sin(\theta_2 - \theta_4) = -15.36 \sin\theta_4 - 14.4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \qquad (ii)$$

وبالتعويض في المعادلتين (i) و (ii) عن $\theta_2 = 80^o = 1.396$ rad و $\theta_{4_0} = 100^o = 1.745$ rad :

$$f_0 = 6.69 - 4.8 \cos 80 + 15.36 \cos 100 - 14.4 \cos (80 - 100) = -10.34$$

$$m_0 = \frac{df}{d\theta_4} = -15.36 \sin 100 - 14.4 \sin (80 - 100) = -10.2$$

وبالتعويض في المعادلة (5-26)

$$\theta_{4_1} = \theta_{4_0} - \frac{f_0}{m_0} = 1.745 \text{ rad} - (-10.34) / (-10.2) = 0.732 \text{ rad} = 41.914^o$$

وهذه هي قيمة θ_4 الموجودة في السطر الثاني من الجدول. ويعاد التعويض في المعادلتين (i) و (ii) باستخدام هذه القيمة للزاوية θ_4 للحصول على $\theta_{4_2} = 59.73^o$ الموجودة في السطر الثالث من الجدول ، وتكرر عملية التعويض حتى تستقر قيمة θ_4 عند 60.015^o .

جدول 8-5

تفاصيل الحسابات المتكررة للحصول على θ_4 في حالة $\theta_2 = 80^o$

iteration	θ_4 Degrees	θ_4 Radian	f	$\frac{df}{d\theta_4}$
1	100	1.74533	−10.342	−10.202
2	41.914	0.73153	5.9527	−19.143
3	59.73	1.04249	0.0909	−18.255
4	60.015	1.04746	7E−05	−18.226
5	60.015	1.04747	5E−11	−18.226

θ_2^o	θ_4^o	θ_3^o
80	60.015	35.640
90	65.374	38.498
100	70.813	41.635
110	76.273	45.012
120	81.716	48.607
130	87.109	52.406
140	92.431	56.401
150	97.663	60.589
160	102.794	64.964
170	107.812	69.527
180	112.711	74.274
190	117.488	79.203

شكل 12-5

ويبين جدول 9–5 برنامج فورتران استعمل لإجراء الحسابات عند باقي قيم θ_2 ، كما يبين شكل 12–5 أن نتائج البرنامج تتفق تماما مع المنحنى $\theta_2 = 0.78\ (\theta_4)^{0.8}$ ، ويبين الشكل أيضا بعض نتائج البرنامج مجدولة.

جدول 9–5

برنامج لتحليل الآلية الرباعية بحل معادلة فرويدنستين باستعمال طريقة نيوتن—رافسون

```
c Program to solve example  5–6 using  Freundenstein's Equation
c   to calculate the angles for  a 4 bar linkage using Newton–Raphson

    OPEN(6,FILE='Ex5–6.OUT',STATUS='unknown')
c ------------------------      Input   ------------------
    r1=1.5
    r2=1.5
    r3=4.6
    r4=4.8
    w2=100
    a2=30
    Write(6,*) 'r1,r2,r3,r4'
    Write(6,*) r1,r2,r3,r4
c ------------------Guess th4 --------------------------
    th4=80
c -------------------------------------------------------------
    D2R=4*atan(1)/180

     Q = r1**2+ r2**2+ r4**2– r3**2
     S= –2* r1* r2
     U=  2 * r1* r4
     E =–2* r2* r4

c Loop over theta2 from 80 to 195 every 5 degrees
     Write(6,*) 'theta2,theta4,theta3'
     th2=80
     Do 500 Jth=1,24

      th2=th2*D2R
      th4=th4*D2R

c Iteration until F is almost 0
        do 11 i=1,30
           F= Q + S* cos(th2) + U *cos(th4) + E* cos(th2 –th4)
           dfdt4=–U * sin(th4)+E * sin(th2–th4)
           Dth4=F/dfdt4
           th4=th4–Dth4
           if(abs(F).LT. 0.001*r2 ) goto 150
 11     continue
```

```
      Write(6,*) 'No convergence' ,F
150   continue
      th3=ACOS((r1-r2*COS(th2)+r4*COS(th4))/r3)

c     calculation of angular velocities
      w3 = ( (r2 * sin(th2-th4)) / (r3 * sin(th4-th3)) ) *w2
      w4 = ( (r2 * sin(th2-th3)) / (r4 * sin(th4-th3)) ) *w2

c     calculation of angular accelerations
      a3 = (  (r2 *w2**2 *cos(th2-th4)+r3*w3**2*cos(th3-th4) - r4*w4**2)
     &     / (r3 * sin(th4-th3))  )  +w3*a2/w2

      a4 =-(  (r2 *w2**2 *cos(th2-th3)+r3*w3**2 - r4*w4**2*cos(th3-th4))
     &     / (r4 * sin(th3-th4))  )  +w4*a2/w2

      th2=th2/D2R
      th3=th3/D2R
      th4=th4/D2R
      Write(6,99) th2,th3,th4 ,w3,w4,a3,a4

      th2=th2+10
500   continue
99    format(3(f6.2,1x) , 4(f10.3,1x) )
      end
```

5.2.4 السرعة والعجلة في الآلية الرباعية

بعد إيجاد الزوايا θ_4 و θ_3 ، يمكن إيجاد السرعة الزاوية ω_4 إذا علمت السرعة الزاوية للذراع الدوار ω_2 بإجراء عملية التفاضل بالنسبة للزمن لمعادلة فرويدنستين أي المعادلة (23–5) وملاحظة أن $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ نحصل على:

$$- \omega_2 \, S \sin \theta_2 - \omega_4 \, U \sin \theta_4 - (\omega_2 - \omega_4) \, E \sin (\theta_2 - \theta_4) = 0.0 \qquad \text{(g)}$$

أي أن:

$$\omega_4 = \frac{E \sin(\theta_2 - \theta_4) + S \sin \theta_2}{E \sin(\theta_2 - \theta_4) - U \sin \theta_4} \, \omega_2 \qquad (5\text{–}28)$$

وهي صورة أخرى مكافئة للمعادلة (34–3) أي:

$$\omega_4 = \frac{r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \, \omega_2 \qquad (3\text{–}34)$$

ويمكن حساب السرعة الزاوية ω_3 للذراع الرابط coupler (ذراع التوصيل) بإجراء عملية التفاضل بالنسبة للزمن لأي من المعادلتين (b) أو (a) بعد حساب ω_4

وإجراء بعض العمليات الجبرية فيمكن الحصول على المعادلة (3–33) والتي أعيدت كتابتها للتسهيل على القارئ:

$$\omega_3 = \frac{r_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_4 - \theta_3)}\, \omega_2 \qquad (3\text{–}33)$$

وبإجراء عملية التفاضل مرتين بالنسبة للزمن للمعادلتين (a) , (b) وبحل المعادلتين الناتجتين آنيا نحصل على العجلات الزاوية للأضلاع 4 , 3 واللتان يمكن إثبات أنهما تكافئان المـــعادلتين (3–35) و (3–36) واللتين أعيدت كتابتهما للتسهيل على القارئ:

$$\alpha_3 = \frac{r_2\, \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3\, \omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) - r_4\, \omega_4^2}{r_3 \sin(\theta_4 - \theta_3)} + \frac{\omega_3}{\omega_2}\alpha_2 \qquad (3\text{–}35)$$

$$\alpha_4 = -\frac{r_2\, \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + r_3\, \omega_3^2 - r_4\, \omega_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} + \frac{\omega_4}{\omega_2}\alpha_2 \qquad (3\text{–}36)$$

5.3 طريقة نيوتن مع أكثر من معادلة غير خطية

Newton– Raphson method with more than one non–linear equation

وضح الجزء 5.2 من هذا الفصل كيفية استعمال طريقة نيوتن–رافسون وذلك في الحالات التي يمكن فيها اختصار المعادلات إلى معادلة واحدة غير خطية يتم حلها عدديا باستعمال طريقة نيوتن–رافسون. وفي هذا الجزء نبين كيفية استعمال الطريقة لحل مجموعة من المعادلات غير الخطية عدديا دون الحاجة إلى إجراء أي اختصارات لدمجها في معادلة واحدة. وبعد تقديم ملخص موجز عن هذه الطريقة في الجزء التالي سيتم تطبيقها علي آلية الأربعة أضلاع مع بيان برنامج الكمبيوتر المستعمل لهذا الغرض.

5.3.1 شرح الطريقة

يمكن وصف معظم الآليات باستعمال معادلة دائرة مغلقة اتجاهية loop closure equation تحتوي على مجهولين يتم الحصول عليهما بحل معادلتين آنيتين. ولهذا

فسنركز على استعمال الطريقة لحل معادلتين في الصورة :

$$F_1(x,y) = 0 \quad , F_2(x,y) = 0 \tag{5–29}$$

حيث F_1 و F_2 معادلتان غير خطيتان في المجهولين x , y والمطلوب إيجاد جذور المعادلتين roots أي قيم x , y التي تحقق المعادلتين. وتبدأ الخطوات باختيار قيمتين مبدئيتين x_0 , y_0 للجذرين المجهولين وحساب F_{10} و F_{20} وهما قيمتي الدالتين عندهما. وعموما فإن x_0 , y_0 ليسا هما الجذرين المنشودين ولذا فلن يحققا المعادلة (5–29) . فإذا وجد جذران للمعادلتين فإن x_0 , y_0 تختلفان عنهما بمقدار Δx و Δy بحيث إن:

$$\begin{aligned} &F_1(x_0 + \Delta x \, , y_0 + \Delta y) = 0 \, , \\ &F_2(x_0 + \Delta x \, , y_0 + \Delta y) = 0 \end{aligned} \tag{5–30}$$

وباستعمال مفكوك تايلر Taylor series لهاتين المعادلتين مع أخذ أول حدين في كل مفكوك نجد أن:

$$F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\Delta y = 0 \tag{5–31}$$

$$F_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial F_2}{\partial y}\,\Delta y = 0 \tag{5–32}$$

وهاتان معادلتان خطيتان في المجهولين Δx و Δy لأن التفاضلات الجزئية فيهما تحسب عند القيمتين المبدئيتين x_0 , y_0 للجذرين المجهولين. وبعد حل هاتين المعادلتين وإيجاد Δx و Δy نحصل علي قيم تقديرية للجذور:

$$x_1 = x_0 + \Delta x \quad , \quad y_1 = y_0 + \Delta y \tag{5–33}$$

وهذه القيم الجديدة أقرب للجذور الحقيقية. ثم تكرر العملية بحيث تستعمل x_1, y_1 لإيجاد قيم جديدة وتستمر عملية التكرار iteration حتى نصل إلى قيم ثابتة للجذور فتكون هي الجذور المنشودة.

5.3.2 تطبيق الطريقة على الآلية الرباعية

يبين شكل 13–5 آلية الأربعة أضلاع حيث أطوال الأضلاع معلومة وكذلك سرعة وعجلة العمود الدوار O_2A ، والمطلوب تحليل موضع وسرعة وعجلة الأضلاع

الباقية. ولأن هذه الآلية تكون حلقة مقفلة فإنه يمكن إسقاط أطوال أضلاع الآلية الأربعة على محوري y , x (لاحظ مرة أخرى أن محور x ينطبق على خط المراكز O_2O_4 وهو ليس بالضرورة أفقيا، وأن محور y عمودي على محور x). فتكون المركبات في اتجاه محور x للآلية المبينة في شكل 13-5 هي:

$$r_1 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 - r_4 \cos\theta_4 \qquad \text{(h)}$$

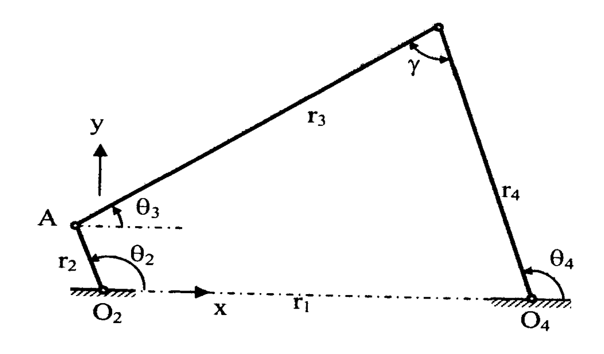
وتكون المركبات في اتجاه محور y هي:

$$r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 - r_4 \sin\theta_4 = 0.0 \qquad \text{(j)}$$

والكميتان المجهولتان في هاتين المعادلتان هما θ_3 , θ_4 ولكن المعادلتين هما من النوع المعضل transcendental الذي لا يمكن حله مباشرة لإيجاد المجهولين ولكن يمكن حلهما عدديا باستعمال طريقة نيوتن-رافسون. والمثال التالي يبين تطبيق الطريقة وكذلك البرنامج المستعمل للحصول على النتائج.

مثال 7 – 5:

في الآلية المبينة في شكل 13-5 بين تغير زاوية النقل γ transmission angle وكذلك زاوية الضلع التابع (أي الزاوية θ_4) وزاوية ذراع التوصيل (أي الزاوية θ_3) وذلك عندما يدور الذراع O_2A دورة كاملة. الأبعاد هي: $r_1=20$, $r_2=4$, $r_3=20$, $r_4= 16$ cm



شكل 13-5

الحل:

تعاد كتابة المعادلتين (j) , (h) في الصورة:

$$F_1 = r_1 - r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 + r_4 \cos\theta_4 \quad (k)$$

$$F_2 = - r_2 \sin\theta_2 - r_3 \sin\theta_3 + r_4 \sin\theta_4 \quad (l)$$

والمطلوب إيجاد جذور المعادلتين roots أي قيم θ_3 , θ_4 التي تجعل كلا من F_1 و F_2 تساوي صفرا. تكتب المعادلتين (5–31), (5–32) في الصورة:

$$\frac{\partial F_1}{\partial\theta_3}\,\Delta\theta_3 + \frac{\partial F_1}{\partial\theta_4}\,\Delta\theta_4 = -F_1 \quad (5\text{–}34)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial\theta_3}\,\Delta\theta_3 + \frac{\partial F_2}{\partial\theta_4}\,\Delta\theta_4 = -F_2 \quad (5\text{–}35)$$

وتكون المشتقات الجزئية التي تظهر في المعادلتين (5–34), (5–35) هي:

$$\frac{\partial F_1}{\partial\theta_3} = r_3 \sin\theta_3 \ , \ \frac{\partial F_1}{\partial\theta_4} = - r_4 \sin\theta_4 \quad (5\text{–}36)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial\theta_3} = - r_3 \cos\theta_3 \ , \ \frac{\partial F_2}{\partial\theta_4} = r_4 \cos\theta_4 \quad (5\text{–}37)$$

وتحسب زاوية النقل γ transmission angle من العلاقة الهندسية:

$$\gamma = \theta_4 - \theta_3 \quad (5\text{–}38)$$

وتبدأ عملية الحسابات المتكررة iteration باختيار قيم تجريبية للمجهولين θ_{4_0} ، θ_{3_0} وهذه القيم التجريبية المبدئية قد تؤخذ بالتخمين أو من رسم الآلية في أحد أوضاعها وقياس الزاويتين ، ثم تستعمل القيم التي تنتج من برنامج الكمبيوتر كقيم مبدئية في الأوضاع الأخرى للآلية. وتعوض هذه القيم المبدئية في المعادلتين (5–36), (5–37) لحساب المشتقات الجزئية. ثم تحل المعادلتان (5–35) ,(5–34) لإيجاد $\Delta\theta_4$, $\Delta\theta_3$. ويتم الحصول على قيم جديدة للمجهولين θ_4 ، θ_3 من المعادلة:

$$\theta_{3_1} = \theta_{3_0} + \Delta\theta_3 \quad , \quad \theta_{4_1} = \theta_{4_0} + \Delta\theta_4 \quad (5\text{–}39)$$

وهذه القيم الجديدة أقرب للجذور الحقيقية. ثم تكرر العملية بحيث تستعمل θ_4 ، θ_3 لإيجاد قيم جديدة وتستمر عملية التكرار iteration حتى نصل إلى قيم ثابتة للجذور فتكون هي الجذور المنشودة.

ويعطي جدول 10–5 تفاصيل الحسابات في حالة $\theta_2 = 30^o$ والتي تظهر الوصول إلى الحل الصحيح بعد خمسة تكرارات فقط رغم أن القيم التخمينية كانت بعيدة عن القيم الصحيحة. وكمثال على الحسابات التي أجريت في أول محاولة first iteration:

القيم التجريبية المبدئية هي:

$$\theta_{3_0} = 50^o \qquad , \theta_{4_0} = 80^o$$

وبالتعويض في المعادلتين (k) و (l)

$$F_{1_0} = r_1 - r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_{3_0} + r_4 \cos\theta_{4_0} = 6.458518$$

$$F_{2_0} = -r_2 \sin\theta_2 - r_3 \sin\theta_{3_0} + r_4 \sin\theta_{4_0} = -1.56397$$

وبالتعويض في المعادلتين (36–5) و (37–5)

$$\frac{\partial F_1}{\partial \theta_3} = r_3 \sin\theta_{3_0} = 15.32089$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \theta_4} = -r_4 \sin\theta_{4_0} = -15.7569$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta_3} = -r_3 \cos\theta_{3_0} = -12.8558$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta_4} = r_4 \cos\theta_{4_0} = 2.77837$$

وبالتعويض في المعادلة (34–5)

$$\frac{\partial F_1}{\partial \theta_3} \Delta\theta_{3_0} + \frac{\partial F_1}{\partial \theta_4} \Delta\theta_{4_0} = -F_{1_0}$$

أي أن:

$$15.32089\, \Delta\theta_{3_0} - 15.7569\, \Delta\theta_{4_0} = -6.458518 \qquad \text{(m)}$$

وبالتعويض في المعادلة (35–5)

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta_3} \Delta\theta_{3_0} + \frac{\partial F_2}{\partial \theta_4} \Delta\theta_{4_0} = -F_{2_0}$$

نحصل على:

$$-12.8558\ \Delta\theta_{3_0} + 2.77837\ \Delta\theta_{4_0} = 1.56397 \qquad (n)$$

ولحل المعادلتين الآنيتين (m) و (n) يلزم حساب المحدد D :

$$D = (\frac{\partial F_1}{\partial \theta_3})(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_4}) - (\frac{\partial F_1}{\partial \theta_4})(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_3})$$
$$= (15.32089)(2.77837) - (-15.7569)(-12.8558) = -160$$

ومنها يتم حساب $\Delta\theta_{3_0}$:

$$\Delta\theta_{3_0} = [-(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_4})(F_{1_0}) - (\frac{\partial F_1}{\partial \theta_4})(F_{2_0})] / D$$
$$= [-(2.77837)(6.458518)-(15.7569)(-1.56397)] / (-160) = -0.04187\ \text{rad} = -2.39895^o$$

وتكون القيمة الجديدة للزاوية θ_3 والأقرب للقيمة الحقيقية هي:

$$\theta_{3_1} = \theta_{3_0} + \Delta\theta_{3_0} = 50 - 2.39895 = 47.6011^o$$

وبالمثل للزاوية θ_4 :

$$\Delta\theta_{4_0} = [(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_3})(F_{1_0}) - (\frac{\partial F_1}{\partial \theta_3})(F_{2_0})] / D$$
$$= [(-12.8558)(6.458518)-(15.32089)(-1.56397)]/(-160) = -0.369\ \text{rad} = 21.1521^o$$
$$\theta_{4_1} = \theta_{4_0} + \Delta\theta_{4_0} = 80 + 21.1521 = 101.1521^o$$

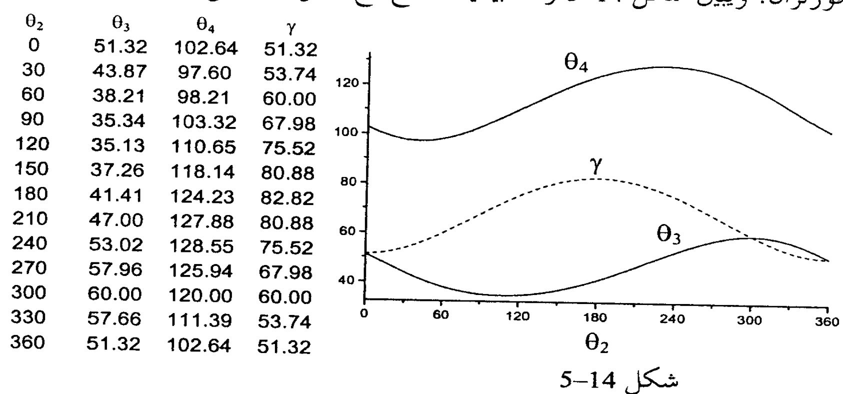
جدول 10–5

تفاصيل الحسابات المتكررة للحصول على θ_4 و θ_3 في حالة $\theta_2 = 30^o$

θ_3	θ_4	F_1	F_2	$\Delta\theta_3$	$\Delta\theta_4$
50	80	6.458518	–1.56397	–2.39895	21.1521
47.6011	101.1521	-4.450×10^{-2}	–1.07148	–3.71332	– 3.6561
43.8877	97.49599	3.460×10^{-2}	-1.687×10^{-3}	–0.02202	0.10573
43.8657	97.60171	6.000×10^{-6}	-2.600×10^{-5}	-9.5×10^{-5}	-6.2×10^{-5}
43.8656	97.60165	-3.234×10^{-7}	1.657×10^{-7}	0.000001	-1×10^{-6}
43.8656	97.60165	-3.234×10^{-7}	1.657×10^{-7}	0.000001	-1×10^{-6}

وهذه هي قيم θ_{4_1} و θ_{3_1} الموجودة في السطر الثاني من الجدول. ويعاد التعويض في المعادلات (k) و (l) و(m) و (n) باستخدام هذه القيم للزوايا θ_{4_1} و θ_{3_1} ثم تحل المعادلتان الآنيتان للحصول على قيمة 97.49599° للزاوية θ_{4_2} و 43.8877° للزاوية θ_{3_2} وهي القيم الموجودة في السطر الثالث من جدول 5–10 ، وتكرر عملية التعويض حتى تستقر قيمة θ_4 عند 97.60165° وقيمة θ_3 عند $.43.8656^\circ$

ويبين جدول 5–11 البرنامج الذي استعمل لتحقيق هذا الهدف وهو بلغة فورتران. ويبين شكل 5–14 رسما بيانيا للنتائج مع جدولة لها كل 30°.



θ_2	θ_3	θ_4	γ
0	51.32	102.64	51.32
30	43.87	97.60	53.74
60	38.21	98.21	60.00
90	35.34	103.32	67.98
120	35.13	110.65	75.52
150	37.26	118.14	80.88
180	41.41	124.23	82.82
210	47.00	127.88	80.88
240	53.02	128.55	75.52
270	57.96	125.94	67.98
300	60.00	120.00	60.00
330	57.66	111.39	53.74
360	51.32	102.64	51.32

شكل 5–14

جدول 5–11

برنامج لتحليل الآلية الرباعية بحل معادلتين باستعمال طريقة نيوتن—رافسون

```
c Program to Calculate theta3 and theta4 of the a 4 bar linkage using Newton–Raphson
      OPEN(6,FILE='Ex5–7.OUT',STATUS='unknown')
c ------------------------      Input      -----------------
      r1=200
      r2=40
      r3=200
      r4=160
      w2=100
      a2=30
      delta=10
      Write(6,*) 'r1,r2,r3,r4'
```

```
      Write(6,99) r1,r2,r3,r4
c -------------------Guess th3 & th4 ------------------
      th3=50
      th4=80
c -------------------------------------------------------------
      D2R=3.141592653/180
      delta=delta*D2R
      th2=0
c Loop over theta2 from 0 to 360
       Write(6,*) 'th2,th3,th4,gamma'

      Do 500 Jth=1,37

      th2=th2*D2R
      th3=th3*D2R
      th4=th4*D2R

c Iteration until F1& F2 are almost 0
        do 11 i=1,30

           F1=r1-r2*cos(th2)-r3*cos(th3)+r4*cos(th4)
           F2= - r2*sin(th2) - r3*sin(th3)+r4*sin(th4)

           df1dt3=r3*sin(th3)
           df1dt4=-r4*sin(th4)
           df2dt3=-r3*cos(th3)
           df2dt4=r4*cos(th4)
c   solving Equations (5-34),(5-35)
           D=df1dt3*df2dt4-df1dt4*df2dt3
           Dth3=-(df2dt4*F1-df1dt4*F2)/D
           Dth4=(df2dt3*F1-df1dt3*F2)/D

           th3=th3+Dth3
           th4=th4+Dth4

          if(abs(F1).LT. 0.001*r2 .AND. abs(F2).LT. 0.001*r2) goto 150

 11     continue
         Write(6,*) 'No convergence' ,F1,F2

150  th2=th2/D2R
         th3=th3/D2R
         th4=th4/D2R
         g=th4-th3
         Write(6,99) th2,th3,th4,g
         th2=th2+10
500  continue

99   format(6(f7.2,1x))
     end
```

خاتمة الفصل الخامس

توفر طريقة التفاضل العددي وسيلة فعالة لتحليل حركة الآليات حيث تعتمد الطريقة على إيجاد معادلات تحدد موضع وصلات الآلية والنقاط المطلوب معرفة حركتها ، وهذه المعادلات يمكن استنتاجها بسهولة نسبية باستعمال أساسيات الهندسة المستوية ، وبعد ذلك يصبح إيجاد السرعات والعجلات باستخدام التفاضل العددي أمرا مكررا (روتينيا) لا يتغير من آلية إلى أخرى. وأهم ما يجب التنبه له هو لزوم استعمال دقة عالية في إجراء الحسابات لأن الطريقة تعتمد على طرح أرقام كبيرة من بعضها لإيجاد فروق عددية صغيرة بينها. وعدا مشكلة الدقة العددية العالية المطلوبة (والتي يمكن تحقيقها بسهولة باستعمال الكمبيوتر) فإن هذه الطريقة توفر حلا سهلا خصوصا في حالة الآليات التي تنـــزلق أجزاؤها على بعضها كما وضح ذلك مثال 4-5.

أما استعمال طريقة نيوتن — رافسون فإن فائدها الأساسية هي في حل معادلات الموضع غير الخطية وهي بذلك توفر وسيلة فعالة لدراسة الإزاحة وتكون مفيدة عند استنباط أبعاد الآلية synthesis لأداء مهمات معينة ، أما فائدها في تحليل السرعات والعجلات فقد لا يجد القارئ فيها ميزة كبيرة عن الطرق الهندسية أو طرق حل المعادلات الاتجاهية باستخدام جبر الأعداد المركبة.

الفصل السادس
الآليات المكافئة والمركبة
Equivalent Mechanisms and Compound Linkages

ناقشت الفصول الثلاث الأخيرة طرق تحليل الآليات باستخدام الطرق الهندسية والعددية وطرق جبر الأعداد المركبة ، وكذلك تمت مناقشة العديد من الأمثلة المحلولة لشرح الطرق المختلفة. وكانت معظم الحالات التي نوقشت من أنواع الآليات البسيطة التي تحتوي على أضلاع مستقيمة وترتبط مع بعضها بوصلات دورانية hinges أو منـــزلقات sliders وذلك لتسهيل استيعاب طرق التحليل. على أن هناك حالات كثيرة يكون فيها الارتباط بين الأضلاع عن طريق التلامس المباشر sliding contact بين أسطح مقوسة وكذلك بالدحرجة سواء على أسطح مقوسة أو مسطحة. وهناك أيضا الكثير من الآليات المركبة من عدة آليات أبسط. وقد رأينا إفراد هذا الفصل لمناقشة العديد من هذه الحالات مع تصنيفها إلى أصناف متشابهة في طريقة تحليلها. وفيما يلي استعراض لبعض هذه الحالات.

6.1 الحالات المكافئة للآلية الرباعية

هناك أنواع كثيرة من الآليات تتحـــرك لحظيا حركـــة مكافئة تماما لحركة الآلية الرباعية four bar linkage ولاشك أن هذه خاصية مفيدة للغاية في حل مثل هذه الحالات وذلك لأننا قد تعرفنا على نتائج تحليل الآلية الرباعية في الفصلين الثالث والخامس بالتفصيل، كما أوردنا برامج كمبيوتر لحل هذه الآلية بحيث يصبح من السهل هنا تحليل الحركة لبعض الآليات المعقدة بالتعويض المباشر في معادلات الآلية الرباعية أو باستعمال برامج الكمبيوتر التي تحلل الآلية الرباعية.

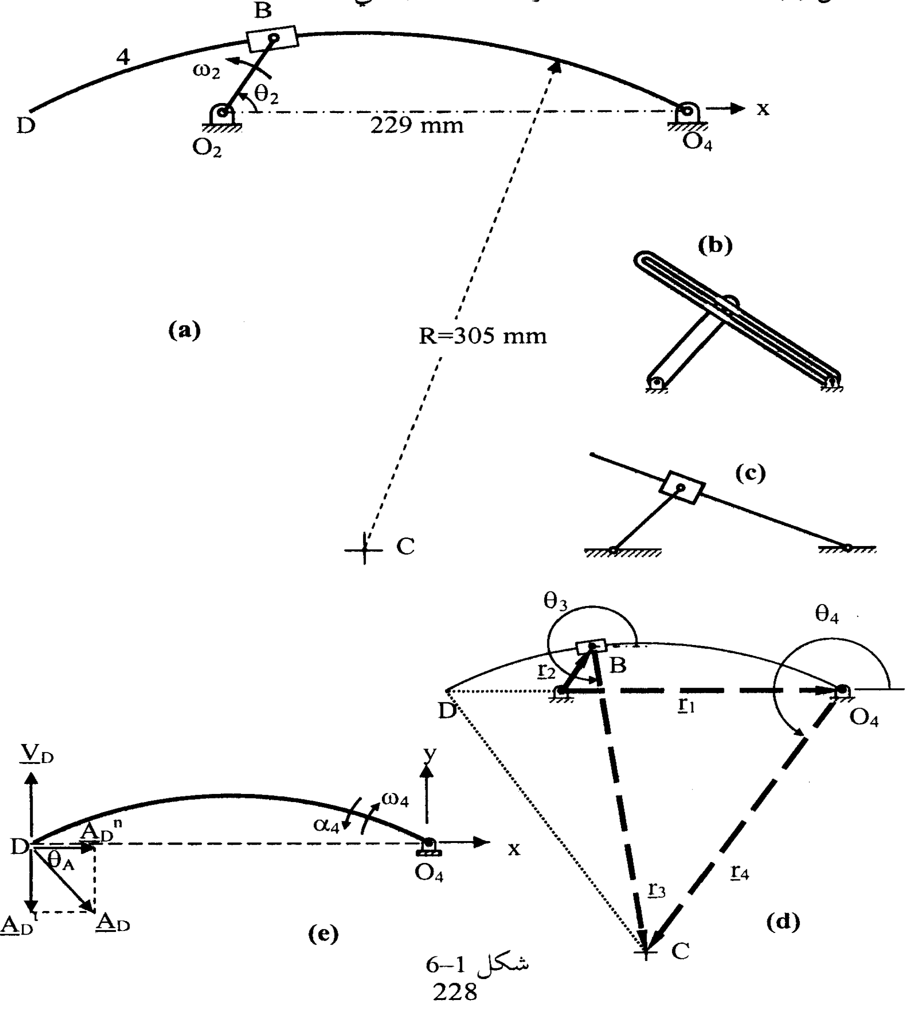
مثال 1–6

الذراع O_2B المبين في شكل (a) 1–6 طوله $r_2 = 50.8$ mm ويدور بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 50$ rad/s. احسب السرعة والعجلة الزاوية للضلع المقوس O_4D وكذلك سرعة وعجلة النقطة D عندما تكون $\theta_2 = 60^o$.

الحل:

هذه الآلية مشابهة في الشكل للآليتين المرسومتين في شكلي (b) 1–6 , (c) واللتان تم

حلهما في الفصل الثالث ، إلا أنها تحتوي علي الضلع الدائري الشكل O_4D والذي ينـــزلق عليه المنـــزلق 4. في هذه الحالة يجب أخذ مركز الانحناء (التقوس) center of curvature في الاعتبار (أي النقطة C) فتكون متجهات الموضع كما هو مبين في شكل (d) 1–6 حيث معادلة الدائرة المغلقة للآلية هي:



شكل 1–6

$$\underline{r}_2 + \underline{r}_3 = \underline{r}_1 + \underline{r}_4 \qquad (6-1)$$

وهذه أربعة متجهات مطابقة تماما لمتجهات الآلية الرباعية ولذلك يكون حلها لحساب الزوايا المجهولة θ_3 , θ_4 باستخدام المعادلتين (25–3) , (20–3) ويتم حساب السرعة والعجلة الزاوية المطلوبتين باستخدام المعادلتين (34–3) , (36–3) كما يمكن أيضا استعمال برنامج الكمبيوتر المبين في جدول 1–3 .ويجب ملاحظة أن الآلية الرباعية المكافئة المبينة في شكل (d) 1– 6 هي من النوع المتقاطع لأن $\underline{r}_3$ يتقاطع مع خط مراكز الدوران O_2O_4. وكحل بديل يمكن استعمال برنامج الكمبيوتر المبين في جدول 8–5 وهو يعتمد لتحليل الآلية الرباعية على حل معادلة فرويدنستين باستعمال طريقة نيوتن–رافسون. والبديل الثالث هو استعمال برنامج الكمبيوتر المبين في جدول 9–5 وهو يعتمد لتحليل الآلية الرباعية على حل المعادلة (1–6) وهي تكافئ معادلتين غير خطيتين باستعمال طريقة نيوتن–رافسون. وفي كل الأحوال تكون المعطيات input data هي:

$r_1 = 229$ mm, $r_2 = 50.8$, $r_3 = 305$, $r_4 = 305$, $\theta_2 = 60^\circ$, $\omega_2 = 50$ rad/s , $\alpha_2 = 0$

والجدول الآتي يبين النتائج (الزوايا بالدرجات ووحدات ω هي rad/s أما وحدات α فهي rad/s^2).

θ_2	θ_3	θ_4	ω_4	α_4
60	277.77	237.84	–7.95	578.82

ويكون اتجاه ω_4 مع عقرب الساعة لأنها سالبة. يلاحظ في هذه الحالة أن ω_4 هي سرعة دوران المتجه $\underline{r}_4$ وهذا المتجه هو جزء من الضلع 4 يدور معه بنفس السرعة.

النقطة D تقع على الذراع 4 الذي يدور حول محور الدوران الثابت O_4 بسرعة وعجلة زاوية α_4 , ω_4 ولذلك يمكن استعمال معلومات الفصل الأول لإيجاد سرعة وعجلة النقطة D بصرف النظر عن التقوس في الذراع ، ولكن يلزم حساب البعد R_{DO_4} (وهو المتجه من O_4 إلى D) يتم من هندسة الشكل بالعلاقة (هذه العلاقة تستنتج من المثلث المتساوي الساقين O_4CD المبين في شكل (d) 1– 6 وفيه الطول O_4C يساوي R والزاوية DO_4C تساوي $180 - \theta_4$)

$$R_{DO_4} = 2\,R \cos(\theta_4 - 180) = 2(305)\cos(237.84 - 180) = 324.69 \text{ mm} = 0.325 \text{ m}$$

ومن ثم يمكن حساب سرعة وعجلة النقطة D كما يلي:

$V_D = \omega_4 R_{DO_4} = (7.95)(0.325) = 2.584 \text{ m/s}$

والنتيجة تدل على أن $\underline{V}_D$ رأسية لأعلى كما هو مبين في شكل (e) 1–6 .

$A_D^n = \omega_4^2 R_{DO_4} = (7.95)^2(0.325) = 20.54 \text{ m/s}^2$

$A_D^t = \alpha_4 R_{DO_4} = (578.82)\ (0.325) = 188.12 \text{ m/s}^2$

وتكون المركبات الرأسية والأفقية للعجلة المبينتان في شكل (e) 1–6 هما:

$A_D^x = A_D^n = 20.54 \text{ m/s}^2$

$A_D^y = -\ A_D^t = \alpha_4 R_{DO_4} = -\ 188.12 \text{ m/s}^2$

وتكون عجلة النقطة مقدارا واتجاها :

$$A_D = \sqrt{(A_D^x)^2 + (A_D^y)^2} = 189.24 \text{ m/s}^2$$

$\theta_A = \tan^{-1}(-\ 188.12/\ 20.54) = -\ 83.77^\circ$

وكحل بديل يمكن حساب سرعة وعجلة النقطة D باستخدام المتجهات كما يلي:

$\underline{\omega}_4 = -7.95\ \underline{k}$, $\underline{\alpha}_4 = 578.82\ \underline{k}$, $\underline{R}_{DO_4} = -\ 0.325\ \underline{i}$

حيث $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ هي وحدات المتجهات في الاتجاهات x , y , z المبينة في شكل(e) 6-1.

$\underline{V}_D = \underline{\omega}_4 \times \underline{R}_{DO_4} = (-7.95\ \underline{k}) \times (-\ 0.325\ \underline{i}) = 2.584\ \underline{j} \text{ m/s}$

وذلك لأن $\underline{j} = (\underline{k} \times \underline{i})$. والنتيجة تدل على أن $\underline{V}_D$ رأسية لأعلى.

$\underline{A}_D^n = -\ \omega_4^2\ \underline{R}_{DO_4} = -\ (-7.95)^2(-\ 0.325\ \underline{i}) = 20.54\ \underline{i} \text{ m/s}^2$

$\underline{A}_D^t = \underline{\alpha}_4 \times \underline{R}_{DO_4} = (578.82\ \underline{k})\ (-\ 0.325\ \underline{i}) = -\ 188.12\ \underline{j} \text{ m/s}^2$

$\underline{A}_D = \underline{A}_D^n + \underline{A}_D^t = 20.54\ \underline{i} - 188.12\ \underline{j}$

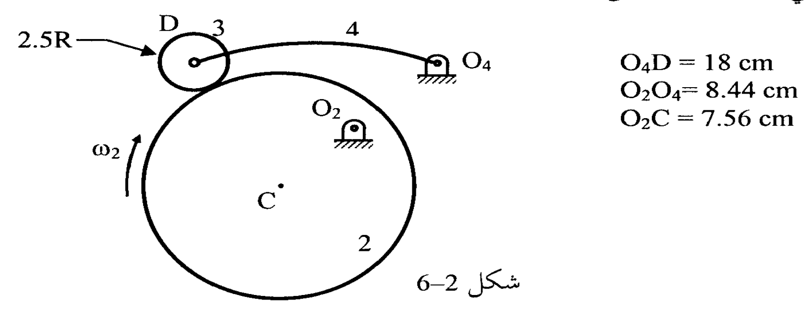
وتكون عجلة النقطة D مقدارا واتجاها

$$A_D = \sqrt{(A_D^n)^2 + (A_D^t)^2} = 189.24 \text{ m/s}^2$$

$\theta_A = \tan^{-1}(-\ 188.12/\ 20.54) = -\ 83.77^\circ$

مثال 2–6

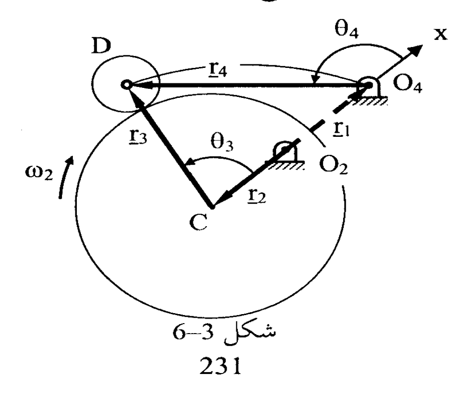
شكل 2–6 يوضح الكامة الدائرية 2 التي نصف قطرها 10 cm وتدور بسرعة زاوية $\omega_2 = 3$ rad/s والتابع المقوس 4 ذو العجلة roller follower. احسب السرعة والعجلة الزاوية للضلع 4 وكذلك سرعة وعجلة النقطة D عندما تكون النقطة C وهي مركز الكامة على امتداد الخط O_2O_4.



شكل 2–6

الحل:

تتدحرج العجلة 3 على سطح الكامة (بانزلاق أو بدون انزلاق) وتظل المسافة CD ثابتة الطول ، وتكون الآلية مكافئة في الحركة للآلية الرباعية المبينة في شكل 3–6 فتكون متجهات الموضع كما في الشكل حيث معادلة الدائرة المغلقة للآلية هي نفسها المعادلة (1–6) ولذلك يكون حلها لحساب الزوايا المجهولة والعجلات الزاوية إما باستخدام المعادلات أو باستعمال برامج الكمبيوتر كما تمت مناقشته في مثال 1–6.



شكل 3–6

ويجب ملاحظة أن الآلية الرباعية المكافئة المبينة في شكل 3–6 هي من النوع المفتوح لأن r_3 لا يتقاطع مع خط مراكز الدوران O_2O_4، وملاحظة أيضا أن تقوس الضلع O_4D ليس له أي تأثير لأن العبرة في المسافة المستقيمة بين الوصلتين O_4 , D وهي ثابتة الطول أثناء الحركة. وتكون المعطيات input data هي:

$r_1 = 8.44$ cm, $r_2 = 7.56$, $r_3 = 12.5$, $r_4 = 18$, $\theta_2 = 180°$, $\omega_2 = -3$ rad/s , $\alpha_2 = 0$

والجدول الآتي يبين النتائج (الزوايا بالدرجات وهي مقاسة من محور x المنطبق على خط مركزي الدوران O_2 , O_4 ، ووحدات ω هي rad/s أما وحدات α فهي rad/s^2).

θ_2	θ_3	θ_4	ω_4	α_4
180	77.25	137.36	−1.417	−0.507

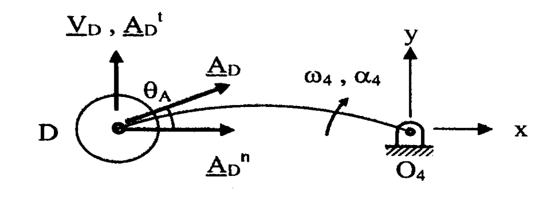
والإشارة السالبة لكل من ω_4 و α_4 تدل على أنهما مع اتجاه عقرب الساعة.

النقطة D تقع على الذراع 4 الذي يدور حول محور الدوران الثابت O_4 بسرعة وعجلة زاوية ω_4 , α_4 ولذلك يمكن استعمال معلومات الفصل الأول لإيجاد سرعة وعجلة النقطة D المبينة في شكل 4–6 بصرف النظر عن التقوس في الذراع كما يلي:

$V_D = \omega_4 R_{DO_4} = (1.417)(18) = 25.51$ cm/s

$A_D^n = \omega_4^2 R_{DO_4} = (1.417)^2(18) = 36.17$ cm/s^2

$A_D^t = \alpha_4 R_{DO_4} = (0.507)(18) = 9.13$ cm/s^2



شكل 4–6

وتكون عجلة النقطة D مقدارا واتجاها:

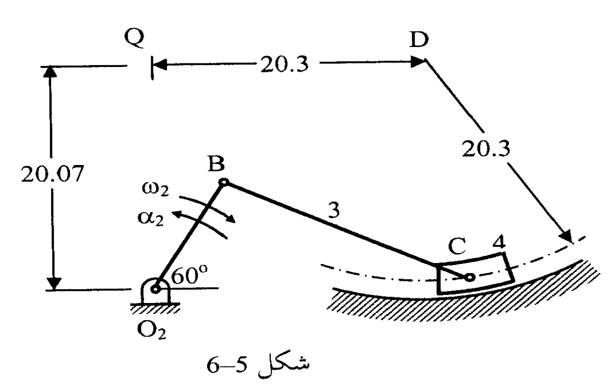
$$A_D = \sqrt{(A_D^x)^2 + (A_D^y)^2} = 37.3 \text{ cm/s}^2$$

$$\theta_A = \tan^{-1}(9.13/36.17) = 14.2^o$$

ملحوظة: يمكن إيجاد السرعة والعجلة الزاوية للضلع الدائري 3 باستخدام طريقتي السرعة والعجلة النسبية واللتين سيتم شرحهما في الفصلين الثامن والتاسع.

مثال 3–6

الذراع O_2B المبين في شكل 5–6 طوله $r_2 = 10.2$ cm ويدور بسرعة زاوية $\omega_2 = 30$ rad/s مع عقرب الساعة وعجلة زاوية $\alpha_2 = 240$ rad/s^2 عكس عقرب الساعة. احسب السرعة والعجلة الزاوية للضلع 3 الذي طوله 20.3 cm وللمنـــزلق 4 .الأبعاد في شكل 5–6 بالسنتيمتر.



شكل 5–6

الحل:

يتحرك المنـــزلق 4 على السطح المقعر الذي مركزه النقطة D وتظل المسافة CD ثابتة الطول أثناء الحركة ، وتكون الآلية مكافئة في الحركة للآلية الرباعية المبينة في شكل 6(a)–6. وتكون متجهات الموضع للآلية المكافئة هي نفسها المعادلة (1–6) ولذلك يمكن حلها لحساب الزوايا المجهولة والسرعات والعجلات الزاوية إما باستخدام المعادلات أو باستعمال برامج الكمبيوتر كما تمت مناقشته في المثالين السابقين.

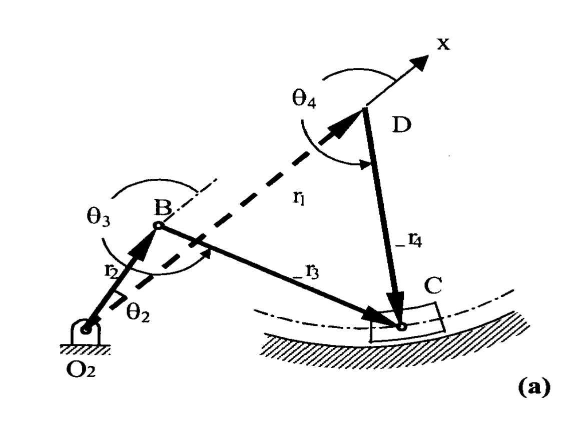
والمسافة r_1 (وهي تساوي الطول O_2D) يمكن حسابها بملاحظة أن الخط O_2D

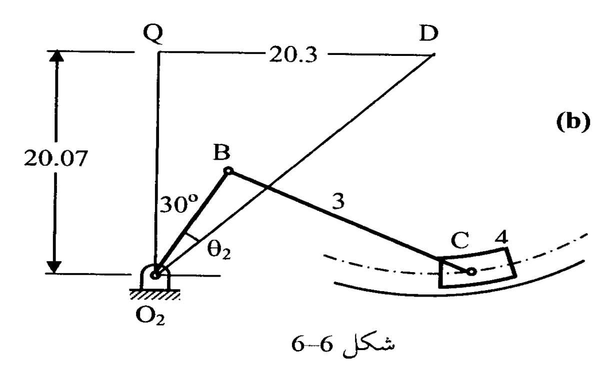
المبين في شكل (b)6–6 هو وتر المثلث O_2DQ القائم الزاوية عند Q ، أي أن:

$$r_1 = O_2D = \sqrt{(O_2Q)^2 + (DQ)^2} = \sqrt{(20.3)^2 + (20.07)^2} = 28.55 \text{ cm}$$

$$\text{angle } QO_2D = \tan^{-1}\left(\frac{QD}{QO_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20.3}{20.07}\right) = 45.33^\circ$$

$$\theta_2 = \text{angle } DO_2B = \text{angle } QO_2D - \text{angle } QO_2B = 45.33 - 30 = 15.33^\circ$$





شكل 6–6

ويجب ملاحظة أن الآلية الرباعية المكافئة المبينة في شكل (a)6–6 هي من النوع

المتقاطع لأن $\underline{r}_3$ يتقاطع مع خط مراكز الدوران O_2D بينما $\theta_2 = 15.33^o$. وتكون المعطيات input data هي:

$r_1 = 28.43$ cm , $r_2 = 10.2$ cm , $r_3 = 20.3$ cm , $r_4 = 20.3$ cm , $\theta_2 = 15.33^o$
$\omega_2 = -30$ rad/s , $\alpha_2 = 240$ rad/s^2

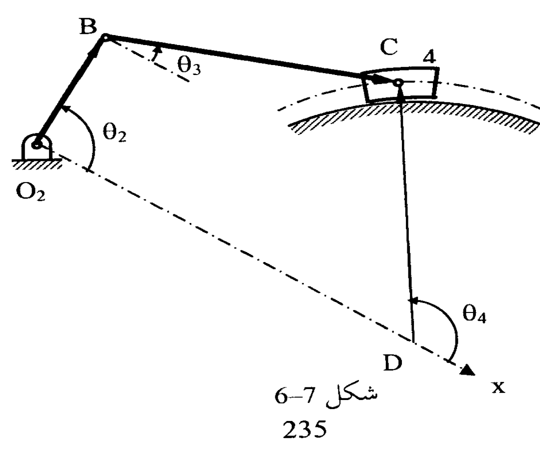
والجدول الآتي يبين النتائج (الزوايا بالدرجات وهي مقاسة من محور x المنطبق على خط مركزي الدوران O_2 D ، ووحدات ω هي rad/s أما وحدات α فهي rad/s^2).

θ_2	θ_3	θ_4	ω_3	ω_4	α_3	α_4
15.33	289.54	234.05	11.44	18.245	650.53	–116.29

ويلاحظ من النتائج أن المنـــزلق 4 يدور بسرعة زاوية $\omega_4 = 18.245$ rad/s عكس عقرب الساعة أثناء انـــزلاقه وهي حركة تختلف عن الانـــزلاق المعتاد على مستوى ، وسبب ذلك أن الحركة تتم على السطح المقعر الذي مركزه النقطة D فهي لذلك تتكون من انـــزلاق ودوران.

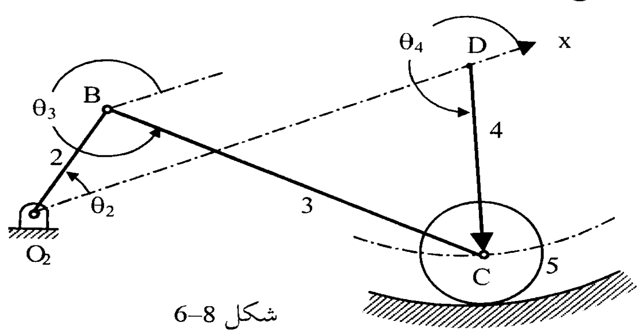
6.1.1 أمثلة أخرى لحالات مكافئة للآلية الرباعية

شكل 7–6 يوضح الآلية O_2BC وهي آلية منـــزلق على سطح محدب ، وهي مكافئة للآلية الرباعية O_2BCD حيث D هي مركز انحناء السطح المحدب. والآلية المكافئة هي من النوع المفتوح وتقاس الزوايا من محور x المنطبق على خط المراكز O_2D.



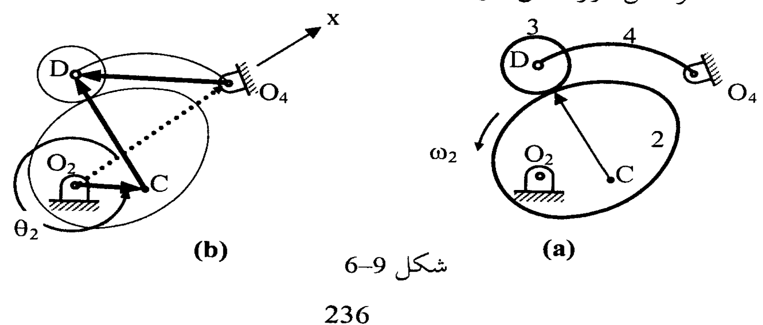
شكل 7–6

شكل 8–6 يوضح الآلية O_2BC وهي تتكون من الذراع الدوار O_2B وذراع التوصيل BC الذي يتحرك على سطح مقعر عن طريق العجلة 5 ، وهذه الآلية مكافئة للآلية الرباعية O_2BCD حيث D هي مركز انحناء السطح المقعر. والآلية المكافئة هي من النوع المتقاطع ، وتقاس الزوايا من محور x المنطبق على خط المراكز O_2D .



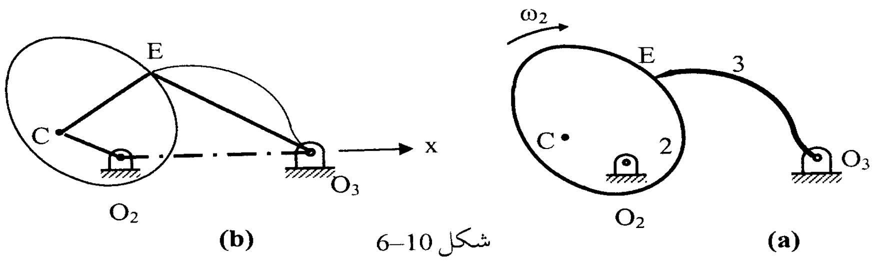
شكل 8–6

ويوضح شكل 6–9(a) آلية الكامة والتابع ذو العجلة roller follower حيث C هي مركز انحناء سطح الكامة عند نقطة التلامس ، وهذه الآلية مكافئة للآلية الرباعية O_2CDO_4 المبينة في شكل 6–9(b). والآلية المكافئة هي من النوع المفتوح على الرغم من أن ذراع التوصيل CD يتقاطع مع خط المركزين O_2O_4 في الوضع المبين في الشكل وذلك لأن هذا التقاطع يحدث في حالة قيمة الزاوية θ_2 تقع بين 180° و 360° وهذا شرط من شروط كون الآلية من النوع المفتوح كما فصلنا ذلك في الفصل الثالث ، وتقاس الزوايا من محور x المنطبق على خط المراكز O_2O_4 .



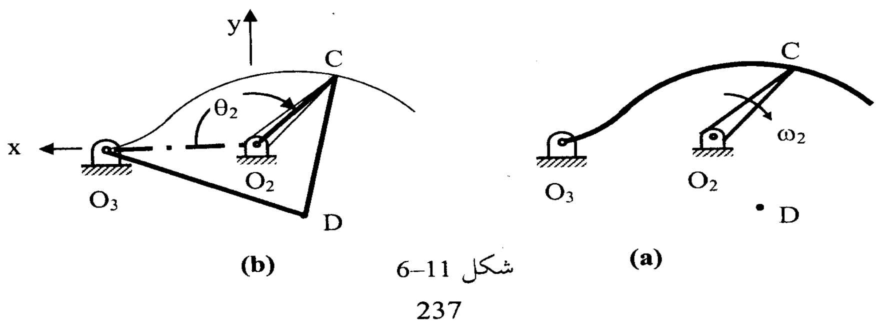
شكل 6–9

وشكل 6–10(a) يوضح آلية كامة أخرى التابع فيها وهو ضلع 3 من نوع ما يسمى حد السكين knife edge follower لأنه يلامس الكامة عند نقطة ثابتة في التابع وهي النقطة E ، وهذه الآلية مكافئة للآلية الرباعية O_2CEO_3 المبينة في شكل 6–10(b) حيث C هي مركز انحناء سطح الكامة عند نقطة التلامس. والآلية المكافئة هي من النوع المفتوح ، وتقاس الزوايا من محور x المنطبق على خط المراكز O_2O_3 .



(b) شكل 6–10 (a)

أما شكل 6–11(a) فيوضح الآلية O_2CO_3 وهي تتكون من الذراع الدوار O_2C والذراع المقوس O_3C ، وهذه الآلية مكافئة للآلية الرباعية O_2CDO_3 المبينة في شكل 6–11(b) حيث D هي مركز انحناء السطح المقوس عند نقطة التلامس C. والآلية المكافئة هي من النوع المتقاطع إذا استعملنا نظام محاور اليد اليسرى المبين في الشكل (وفيه يكون المحور x إلى جهة اليسار والمحور y إلى أعلى وتقاس الزوايا الموجبة مع عقرب الساعة) وذلك لأن ذراع التوصيل CD يتقاطع مع امتداد خط المركزين O_2O_3 وهذا التقاطع يحدث في حالة قيمة الزاوية θ_2 تقع بين $0°$ و $180°$ وهذه حالة من الحالات التي تكون فيها الآلية من النوع المتقاطع كما فصلنا ذلك في الفصل الثالث، وتقاس الزوايا من محور x المنطبق على خط المراكز O_2O_3 .



(b) شكل 6–11 (a)

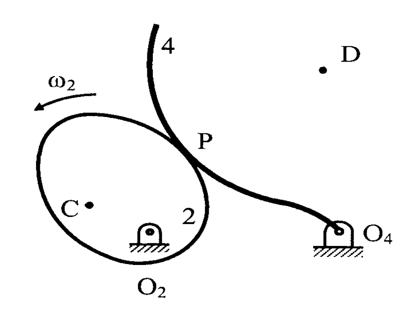
6.1.2 ملاحظات على معنى التكافؤ مع الآلية الرباعية

يجب التأكيد على أن تكافؤ آلية معينة مع الآلية الرباعية معناه أن الزوايا والسرعات والعجلات الزاوية للأضلاع متساوية ، ولكن هذا لا يعني تساوي سرعات وعجلات كل النقاط في الآلية الأصلية مع الآلية المكافئة. والمثال التالي يوضح هذه الحقيقة .

مثال 4–6

يوضح شكل 12–6 آلية كامة فيها التابع وهو الضلع 4 يلامس الكامة عند النقطة P ، فإذا كانت الكامة تدور بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 30$ rad/s عكس عقرب الساعة ، احسب السرعة والعجلة الزاوية للضلع 4 وكذلك سرعتي نقطتي التلامس عند P . النقطة C هي مركز انحناء سطح الكامة عند نقطة التلامس ، و D هي مركز انحناء سطح التابع عند نقطة التلامس.

$O_2O_4 = 29.5$ cm
$O_2C = 8.5$ cm
$CP = 17.5$ cm
$DP = 25$ cm
$O_4D = 28$ cm
Angle $O_4O_2C = 155^o$



شكل 12–6

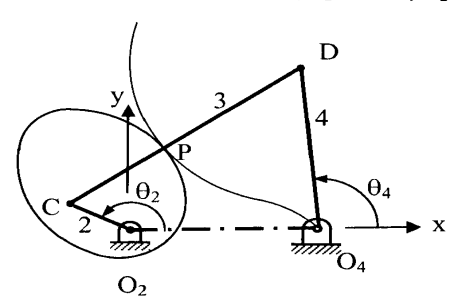
الحل:

هذه الآلية مكافئة للآلية الرباعية O_2CDO_4 المبينة في شكل 13–6 حيث C هي مركز انحناء سطح الكامة عند نقطة التلامس ، وحيث D هي مركز انحناء سطح التابع عند نقطة التلامس. والآلية المكافئة هي من النوع المفتوح ، وتقاس الزوايا من محور x المنطبق على خط المراكز O_2O_4 .

ويتم حل الآلية الرباعية المكافئة باستعمال معادلات الفصل الثالث أو برامج

الكمبيوتر. وتكون المعطيات input data هي:

$r_1 = 29.5$ cm, $r_2 = 8.5$ cm, $r_3 = 42.5$ cm, $r_4 = 28$ cm, $\theta_2 = 155°$, $\omega_2 = 30$ rad/s



شكل 13-6

والجدول الآتي يبين النتائج (الزوايا بالدرجات وهي مقاسة من محور x المنطبق على خط مركز الدوران O_2 , O_4 ، ووحدات ω هي rad/s أما وحدات α فهي rad/s^2).

θ_2	θ_3	θ_4	ω_3	ω_4	α_3	α_4
155°	34.89	94.79	6.02	9.11	63.247	−139.89

حيث الزاوية θ_3 هي الزاوية بين الخط CD والمحور x كما هو مبين في شكل 6–14(a) . والحصول على إحداثيات النقطة P يتم بالتعويض في المعادلتين (3–27) , (3–26) (المسافة d في المعادلتين هي البعد CP)

$$x_P = r_2 \cos \theta_2 + d \cos \theta_3 = 8.5(\cos 155) + 17.5(\cos 34.89) = 6.65 \text{ cm}$$

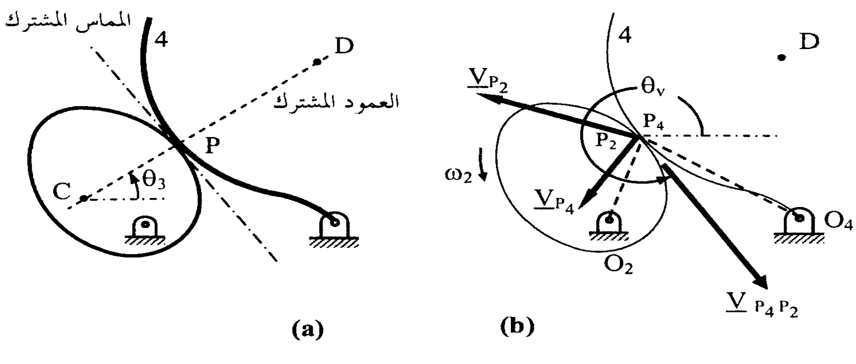
$$y_P = r_2 \sin \theta_2 + d \sin \theta_3 = 8.5(\sin 155) + 17.5(\sin 34.89) = 13.6 \text{ cm}$$

ويجب التمييز بين النقطة P_2 التي هي جزء من الكامة وبين نقطة P_4 التي هي جزء من التابع ، فالنقطتان منطبقتان في اللحظة المبينة بالشكل وأعطيتا الرمز P في الشكل، ولكن سرعتهما مختلفتان عن بعضهما مقدارا واتجاها كما سنثبت ذلك الآن.

إحداثيات النقطة P هي (6.65 , 13.6) وإحداثيات النقطة O_4 هي (29.5,0.0) علما بأن نقطة الأصل هي O_2 . يمكن حساب المسافة O_4P_4 ونرمز لها R_{P_4} من العلاقة الهندسية:

$$R_{P_4} = \sqrt{(x_{P_4}^2 - x_{O_4}^2)^2 + (y_{P_4}^2 - y_{O_4}^2)^2}$$

فنجد أنها تساوي 26.59 cm . وبالمثل يمكن حساب المسافة O_2P_2 فنجد أنها 15.14 cm (ونرمز لها R_{P_2}) ، ومنها:



شكل 14–6

$$V_{P_2} = \omega_2 R_{P_2} = (30)\,(15.14) = 454.2 \text{ cm/s}$$

$$V_{P_4} = \omega_4 R_{P_4} = (9.11)\,(26.59) = 242.1 \text{ cm/s}$$

حيث $\underline{V}_{P_2}$ هي سرعة النقطة P_2 ، وهي عمودية على $\underline{R}_{P_2}$ (أي عمودية على الخط O_2P_2)كما هو مبين في شكل (b)14–6 ، وحيث $\underline{V}_{P_4}$ هي سرعة النقطة P_4 ، وهي عمودية على $\underline{R}_{P_4}$ (أي الخط O_4P_4).

وهذه النتائج تبين أن الآلية المكافئة المبينة في شكل 13–6 لا تعني وجود ضلع حقيقي جامد بين C و D بدليل أن النقطتين P_2 و P_4 الواقعتين على الخط DC لهما سرعتان مختلفتان.

مثال 5–6

في الكامة المبينة في شكل 12–6 استعمل جبر المتجهات لإيجاد السرعة النسبية بين P_2, P_4 مقدارا واتجاها، واثبت أنها في اتجاه المماس المشترك للكامة والتابع عند النقطةP.

الحل:

إحداثيات النقطة P هي (6.65 , 13.6) وإحداثيات النقطة O_4 هي (29.5,0.0) علما بأن نقطة الأصل هي O_2 . فيمكن إيجاد المتجهين $\underline{R}_{P_2}$, $\underline{R}_{P_4}$ كما يلي:

$$\underline{R}_{P_2} = 6.65\ \underline{i} + 13.6\ \underline{j}$$

$$\underline{R}_{P_4} = (6.65 - 29.5)\ \underline{i} + 13.6\ \underline{j} = -22.85\ \underline{i} + 13.6\ \underline{j}$$

حيث $\underline{i}$ و $\underline{j}$ هما وحدتا المتجهات في اتجاه المحور x والمحور y بالترتيب. ويمكن إيجاد السرعتين $\underline{V}_{P_2}$ و $\underline{V}_{P_4}$ كما يلي:

$$\underline{V}_{P_2} = \underline{\omega}_2 \times \underline{R}_{P_2} = (30\ \underline{k}) \times (6.65\ \underline{i} + 13.6\ \underline{j}) = -408.1\ \underline{i} + 199.5\ \underline{j}$$

$$\underline{V}_{P_4} = \underline{\omega}_4 \times \underline{R}_{P_4} = (9.11\ \underline{k}) \times (-22.85\ \underline{i} + 13.6\ \underline{j}) = -123.85\ \underline{i} - 208.05\ \underline{j}$$

وسرعة P_4 بالنسبة إلى P_2 هي فرق السرعتين (ويرمز لهذه السرعة النسبية بالرمز $\underline{V}_{P_4 P_2}$) ، أي:

$$\underline{V}_{P_4 P_2} = \underline{V}_{P_4} - \underline{V}_{P_2} = (-123.85 + 408.1)\ \underline{i} + (-208.05 - 199.5)\ \underline{j} = 284.21\ \underline{i} - 407.6\ \underline{j}$$

ومقدار هذه السرعة النسبية واتجاهها كما هو مبين في شكل 6–14(b) هما:

$$V_{P_4 P_2} = \sqrt{284.21^2 + 407.6^2} = 496.88 \text{ cm/s}$$

$$\theta_v = \tan^{-1} \frac{-407.6}{284.21} = -55.11^\circ = 304.89^\circ$$

ولإثبات أن السرعة النسبية $\underline{V}_{P_4 P_2}$ تكون في اتجاه المماس المشترك للكامة والتابع والمبين في شكل 6–14(a) يلزم إثبات أن $\underline{V}_{P_4 P_2}$ عمودية على الخط CD (وهو العمود المشترك للكامة والتابع) . وهذا التعامد يمكن إثباته ببيان أن حاصل الضرب المقياسي scalar product of vectors للمتجهين $\underline{V}_{P_4 P_2}$ و $\underline{\bar{r}}_{DC}$ يساوي صفرًا حيث $\underline{\bar{r}}_{DC}$ هو وحدة المتجه بين النقطتين C , D كما يلي:

$$\underline{\bar{r}}_{DC} = \cos\theta_3\ \underline{i} + \sin\theta_3\ \underline{j} = (\cos 34.89)\ \underline{i} + (\sin 34.89)\ \underline{j} = (0.82)\ \underline{i} + (0.572)\ \underline{j}$$

$$\underline{V}_{P_4 P_2} \cdot \underline{\bar{r}}_{DC} = (284.21)(0.82) - 407.6\ (0.572) = 0.0$$

وهذا إثبات أن $\underline{V}_{P_4 P_2}$ متعامد مع CD .

وكحل بديل لإثبات التعامد نستعمل القاعدة الهندسية القاضية بأن حاصل ضرب ميل خطين متعامدين يساوي (1−) :

$$(\tan \theta_3)\ (\tan \theta_v) = \tan(34.89^o)\ \tan(-55.11^o) = -1$$

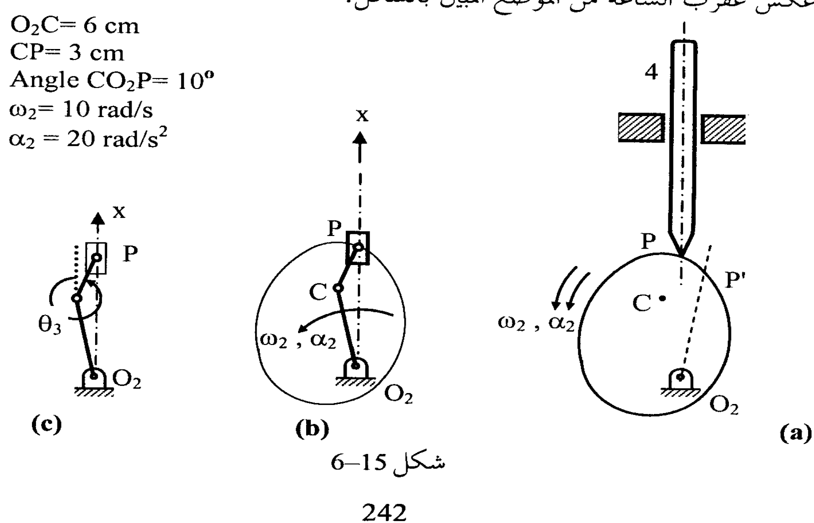
وهذا إثبات آخر أن $\underline{V}_{P_4 P_2}$ متعامد مع CD.

6.2 الحالات المكافئة لآلية المنزلق

بعض أنواع الآليات تتحرك لحظيا حركة مكافئة تماما لحركة آلية المنـــزلق crank-slider ولاشك أن هذه خاصية مفيدة في حل مثل هذه الحالات وذلك لأننا قد تعرفنا على نتائج تحليل آلية المنـــزلق العادية في الفصل الثالث وآلية المنـــزلق المنحرف في الفصل الرابع ، كما أوردنا برامج كمبيوتر لحل هذه الآلية بحيث يصبح من السهل هنا تحليل الحركة بالتعويض المباشر في المعادلات أو باستعمال برامج الكمبيوتر.

مثال 6-6

الكامة المبينة في شكل (a)15-6 تدور بسرعة $\omega_2 = 10$ rad/s وبعجلة زاوية $\alpha_2 = 20$ rad/s^2 عكس عقرب الساعة. احسب السرعة والعجلة الخطية للتابع في اللحظة المبينة بالشكل . واحسب أيضا مقدار حركة التابع نتيجة لدوران الكامة 10^o عكس عقرب الساعة من الموضع المبين بالشكل.



شكل 15-6

الحل: النقطة P هي نقطة التلامس بين التابع والكامة ، والنقطة C هي مركز انحناء سطح الكامة عند نقطة التلامس. وحركة الكامة والتابع مكافئة لحركة آلية المنـــزلق كما هـــو موضح في شكل 6-15(b) حيث O_2C هو العمود الدوار crank ، أما ذراع التوصيل فهو CP (لاحظ أن المحور x يكون رأسيا أي في اتجاه حركة المنـــزلق حتى يمكن تطبيق معادلات الحركة المستنتجة في الفصول السابقة).

وتكون سرعة التابع 4 مساوية لسرعة المنـــزلق رأسيا عند P ، وقد يحسبها البعض باستعمال المعادلة التقريبية (3-3) حيث :

$$R = O_2C = 6 \text{ cm}, \quad L = CP = 3 \text{ cm}, \quad \theta_2 = \text{angle } CO_2P = 10^o, \quad n = \frac{L}{R} = 0.5$$

$$V_P = -\omega_2 R \left(\sin\theta_2 + \frac{1}{2n} \sin 2\theta_2 \right) = -30.94 \text{ cm/s} \qquad \text{(a)}$$

والإشارة السالبة تعني أن السرعة إلى أسفل. وتكون عجلة التابع 4 مساوية لعجلة المنـــزلق عند P رأسيا، وهي قد تحسب باستعمال المعادلة (4-3):

$$A_P = -\omega_2^2 R \left(\cos\theta_2 + \frac{1}{n} \cos 2\theta_2 \right) + \frac{\alpha_2}{\omega_2} V_P = -1780.4 \text{ cm/s}^2 \qquad \text{(b)}$$

ولكن لابد من تذكر أن المعادلتين (3-3) و (4-3) هما معادلتان تقريبيتان وأن دقتهما تعتمد على قيمة n وتكون دقة المعادلتين مقبولة إذا كانت n أكبر من 1.0 ، أما في المسألة الحالية والتي فيها n أصغر من 1.0 فيلزم استعمال المعادلتين الصحيحتين وهما المعادلتان (4-16) و (4-19) كما يلي. أولا نرمز للزاوية CPO_2 بالرمز ϕ وهي تحسب باستعمال المعادلة (3-1):

$$\phi = \sin^{-1}(\sin\theta_2 / n) = 20.32^o$$

ويلاحظ أن معادلات الحركة المستنتجة في الباب الرابع تعتمد الزاوية θ_3 حيث $\theta_3 = 360 - \phi = -\phi = -20.32^o$. وتحسب السرعة الزاوية ω_3 للخط CP من المعادلة (4-15):

$$\omega_3 = \frac{-R \cos\theta_2}{L \cos\theta_3} \omega_2 = -21 \text{ rad/s}$$

وتكون سرعة التابع 4 مساوية لسرعة المنـــزلق عند P رأسيا ، وهي تحسب

باستعمال المعادلة الصحيحة (16–4) :

$$V_P = -\omega_2 \; R \; \sin\theta_2 - \omega_3 \; L \; \sin\theta_3 = -32.3 \text{ cm/s} \qquad (c)$$

ويكون الخطأ الناتج في (a) عن استعمال المعادلة التقريبية (3–3) بالنسبة إلى القيمة الصحيحة (c) حوالي ‎ −4.2% .

ثم تحسب العجلة الزاوية α_3 للخط CP من المعادلة (18–4):

$$\alpha_3 = [\, R(\omega_2^2 \; \sin\theta_2 - \alpha_2 \cos\theta_2\,) + \omega_3^2 \, L \sin\theta_3 \,] \,/\, (L \cos\theta_3\,) = -126.34 \text{ rad/s}^2$$

وتكون عجلة التابع 4 مساوية لعجلة المنـــزلق عند P رأسيا ، وهي تحسب باستعمال المعادلة الصحيحة (19–4) :

$$A_P = -R(\omega_2^2 \cos\theta_2 + \alpha_2 \sin\theta_2\,) - L\,(\omega_3^2 \cos\theta_3 \; + \alpha_3 \; \sin\theta_3\,) = -2028 \text{ cm/s}^2 \; (d)$$

ويكون الخطأ الناتج في (b) عن استعمال المعادلة التقريبية (4–3) بالنسبة إلى القيمة الصحيحة (d) حوالي ‎ −12.22% .

ويتضح من هذه النتائج سهولة استعمال المعادلتين التقريبيتين (3–3) و (4–3) مقارنة بالمعادلتين الصحيحتين (16–4) و (19–4) ، ولكن تظهر النتائج أهمية لزوم الحذر في استعمال هاتين المعادلتين التقريبيتين (3–3) و (4–3) في مثل المسألة الحالية التي تكون فيها $n < 1$ حيث يؤدي ذلك إلى أخطاء كبيرة خاصة في حساب العجلة.

أما المسافة $x_P = O_2P$ فيتم حسابها من المعادلة (2–3) وهي ذات دقة مقبولة

$$x_P = R \cos\theta_2 + R\,(\,n - \frac{1}{2n} \; \sin^2\theta_2\,) = 8.728 \text{ cm}$$

وعند دوران الكامة 10^o عكس اتجاه عقرب الساعة تصبح الزاوية $\theta_2 = 20^o$ ، وتكون هذه الحركة مكافئة لدوران التابع 10^o في اتجاه عقرب الساعة بحيث يتحرك التابع إلى الخط المنقط المبين في شكل 6–15(a) ، وهذا الخط يتقاطع مع سطح الكامة عند النقطة 'P وهي نقطة تلامس التابع مع الكامة في وضعها الجديد. ولأن مركز تقوس سطح الكامة عند النقطة 'P مازال هو النقطة C فإن قيمة R في المعادلة (2–3) لا تتغير ، وتكون المسافة من O_2 إلى النقطة 'P هي:

$$x_P' = R \cos\theta_2 + R\,(\,n - \frac{1}{2n} \; \sin^2\theta_2\,) = 7.936 \text{ cm}$$

وتكون حركة التابع Δx_P نتيجة دوران الكامة 10^o هي:

$\Delta x_P = 7.936 - 8.728 = -0.792$ cm

والإشارة السالبة تعني أن حركة التابع Δx_P تكون إلى أسفل .

مثال 7–6

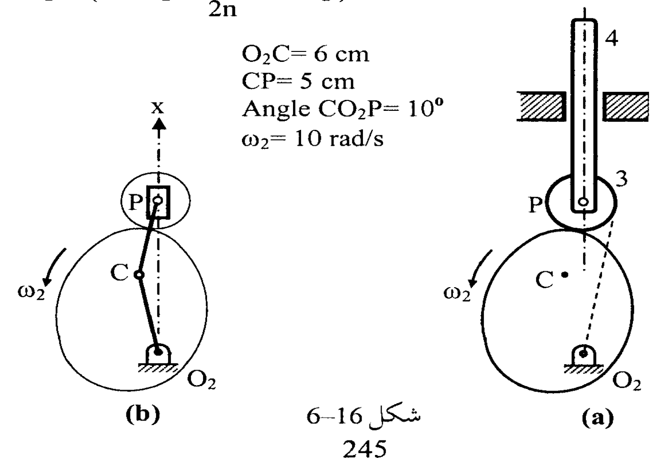
الكامة المبينة في شكل 6–16(a) تدور عكس عقرب الساعة بسرعة منتظمة مقدارها $\omega_2 = 10$ rad/s . احسب السرعة والعجلة الخطية للتابع في اللحظة المبينة بالشكل علما بأن نصف قطر عجلة التابع 2 cm . واحسب أيضا حركة التابع 4 نتيجة لدوران الكامة 10° عكس عقرب الساعة من الموضع المبين بالشكل.

الحل:

النقطة P هي مركز عجلة التابع والنقطة C هي مركز انحناء سطح الكامة عند نقطة تلامسها مع عجلة التابع . وحركة الكامة والتابع مكافئة لحركة آلية المنـــزلق كما هو موضح في شكل 6–16(b) حيث O_2C هو العمود الدوار crank ، أما ذراع التوصيل فهو CP . وتكون سرعة التابع 4 مساوية لسرعة المنـــزلق عند P رأسيا، وهي قد تحسب باستعمال المعادلة (3–3) حيث :

$R = O_2C = 6$ cm , $L = CP = 5$ cm , $\theta_2 =$ angle $PO_2C = 10^{\circ}$, $n = \frac{L}{R} = 0.833$

$$V_P = -\omega_2 R \left(\sin \theta_2 + \frac{1}{2n} \sin 2\theta_2 \right) = -22.73 \text{ cm/s}$$



شكل 6–16

والإشارة السالبة تعني أن السرعة إلى أسفل. وتكون عجلة التابع 4 مساوية لعجلة المنـــزلق عند P رأسيا، وهي تحسب باستعمال المعادلة (4–3):

$$A_P = -\omega_2^2 R \left(\cos\theta_2 + \frac{1}{n} \cos 2\theta_2 \right) + \frac{\alpha_2}{\omega_2} V_P = -1267.5 \text{ cm/s}^2$$

ويلاحظ في المسألة الحالية أن n أصغر من 1.0 ولذلك إذا أعدنا الحسابات باستعمال المعادلتين الصحيحتين وهما المعادلتان (16–4) و (19–4) كما سبق شرحه في المثال السابق نحصل على النتائج التالية. أولا نرمز للزاوية CPO_2 بالرمز ϕ وهي تحسب باستعمال المعادلة (1–3):

$$\phi = \sin^{-1}(\sin\theta_2 / n) = 12.03^o$$

$$\theta_3 = -\phi = -12.03^o$$

$$\omega_3 = \frac{-R \cos\theta_2}{L \cos\theta_3} \omega_2 = -12.08 \text{ rad/s}$$

$$V_P = -\omega_2 R \sin\theta_2 - \omega_3 L \sin\theta_3 = -23.01 \text{ cm/s}$$

$$\alpha_3 = [R(\omega_2^2 \sin\theta_2 - \alpha_2 \cos\theta_2) + \omega_3^2 L \sin\theta_3] / (L \cos\theta_3) = -9.8 \text{ rad/s}^2$$

$$A_P = -R(\omega_2^2 \cos\theta_2 + \alpha_2 \sin\theta_2) - L(\omega_3^2 \cos\theta_3 + \alpha_3 \sin\theta_3) = -1315 \text{ cm/s}^2$$

ومن هذه النتائج يتضح أن المعادلتين التقريبيتين (3–3) و (4–3) ينتج عنهما خطأ بنسبة 1.2%– في حساب سرعة التابع ، وخطأ بنسبة 3.62%– في حساب عجلته. وهذه الأخطاء أصغر منها في المثال السابق لأن n في المسألة الحالية قريبة من 1.0 .

أما المسافة $x_P = O_2P$ فيتم حسابها من المعادلة (2–3):

$$x_P = R\cos\theta_2 + R\left(n - \frac{1}{2n} \sin^2\theta_2\right) = 10.8 \text{ cm}$$

وعند دوران الكامة 10^o عكس اتجاه عقرب الساعة يتحرك التابع على الخط المنقط المبين في شكل (a)16–6 تصبح الزاوية $\theta_2 = 20^o$ وتكون المسافة من O_2 إلى مركز التابع هي:

$$x_P = R\cos\theta_2 + R\left(n - \frac{1}{2n} \sin^2\theta_2\right) = 10.22 \text{ cm}$$

وتكون حركة التابع Δx_P نتيجة دوران الكامة 10^o هي:

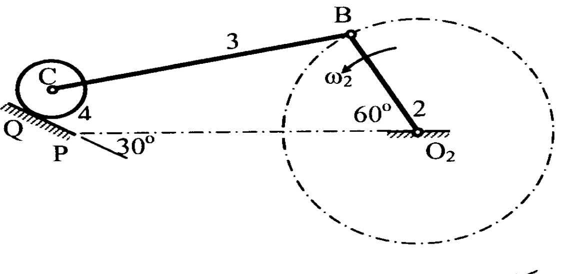
$$\Delta x_P = 10.22 - 10.8 = -0.58 \text{ cm}$$

والإشارة السالبة تعني أن حركة التابع Δx_P إلى أسفل .

ملحوظة: يمكن إيجاد السرعة والعجلة الزاوية للضلع الدائري 3 باستخدام طريقتي السرعة والعجلة النسبية واللتين سيتم شرحهما في الفصلين الثامن والتاسع.

مثال 8–6

يدور الذراع O_2B المبين في شكل 17–6 بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 5$ rad/s عكس عقرب الساعة فتتدحرج العجلة الدائرية 4 على المستوى المائل بدون انزلاق. احسب سرعة وعجلة النقطة C وكذلك السرعة والعجلة الزاوية لكل من الذراع 3 والعجلة 4.



$O_2B = 102$ mm
$BC = 229$ mm
$O_2P = 254$ mm
$QC = 25.4$ mm

شكل 17–6

الحل: حركة هذه الآلية مكافئة لحركة آلية المنـــزلق المنحرف المبينة في شكل 18–6 وذلك لأن مسار النقطة C وهي مركز العجلة هو الخط CU الموازي للمستوى المائل.

ولتحليل الحركة يجب أن تكون نقطة الأصل عند O_2 والمحور x موازيا لمسار المنـــزلق والمحور y عموديا عليه وهذه المحاور تتبع نظام اليد اليسرى (الدوران الموجب يكون مع اتجاه عقرب الساعة). ويمكن استعمال المعادلات التي تم استنتاجها في الفصل الرابع لآلية المنـــزلق المنحرف ، ويكون مقدار الانحراف r_0 مساويا للمسافة UO_2 حيث الخط EO_2 عمودي على الخط CU ، أي أن:

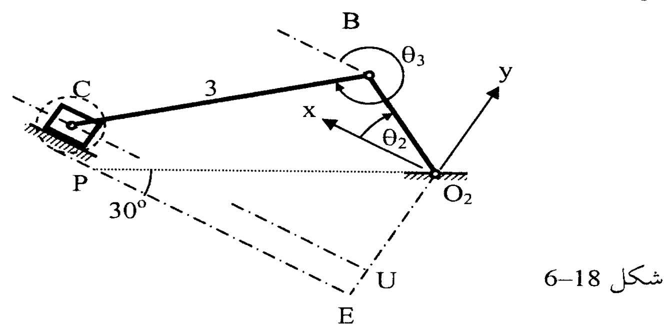
$r_0 = -UO_2 = -(PO_2 \sin 30^\circ - UE) = -(254 \sin 30^\circ - 25.4) = -101.6$ mm

وإشارة r_0 سالبة لأن مسار المنـــزلق (الخط CU) يقع تحت نقطة الأصل O_2.

ويمكن تلخيص المعطيات كما يلي:

R = 102 mm, L = 229 mm, $r_0 = -101.6$ mm , $\theta_2 = 30^\circ$, $\omega_2 = -5$ rad/s, $\alpha_2 = 0$

وباستعمال المعادلات (4-12,15,16,18,19) نحصل على:



شكل 6-18

$$\theta_3 = \sin^{-1}\left(\frac{r_0 - R \sin\theta_2}{L}\right) = -41.79^\circ = 318.21^\circ$$

$$\omega_3 = \left(\frac{-R \cos\theta_2}{L \cos\theta_3}\right)\omega_2 = 2.59 \text{ rad/s}$$ (أي مع عقرب الساعة)

$$V_C = -\omega_2 R \sin\theta_2 - \omega_3 L \sin\theta_3 = 649.73 \text{ mm/s}$$

أي أن C تتحرك في اتجاه المحور x بعيدا عن النقطة U .

$$\alpha_3 = [R(\omega_2^2 \sin\theta_2 - \alpha_2 \cos\theta_2) + \omega_3^2 L \sin\theta_3] / (L \cos\theta_3)$$
$$= 1.49 \text{ rad/s}^2$$ (أي مع عقرب الساعة)

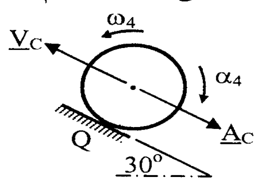
$$A_C = -R(\omega_2^2 \cos\theta_2 + \alpha_2 \sin\theta_2) - L(\omega_3^2 \cos\theta_3 + \alpha_3 \sin\theta_3) = -3124 \text{ mm/s}^2$$

أي أن عجلة C في عكس اتجاه المحور x .

إذا رمزنا لنصف قطر العجلة 4 بالرمز r ، ولأن هذه العجلة تتدحرج بدون انزلاق على خط مستقيم تكون سرعتها وعجلتها الزاوية هما

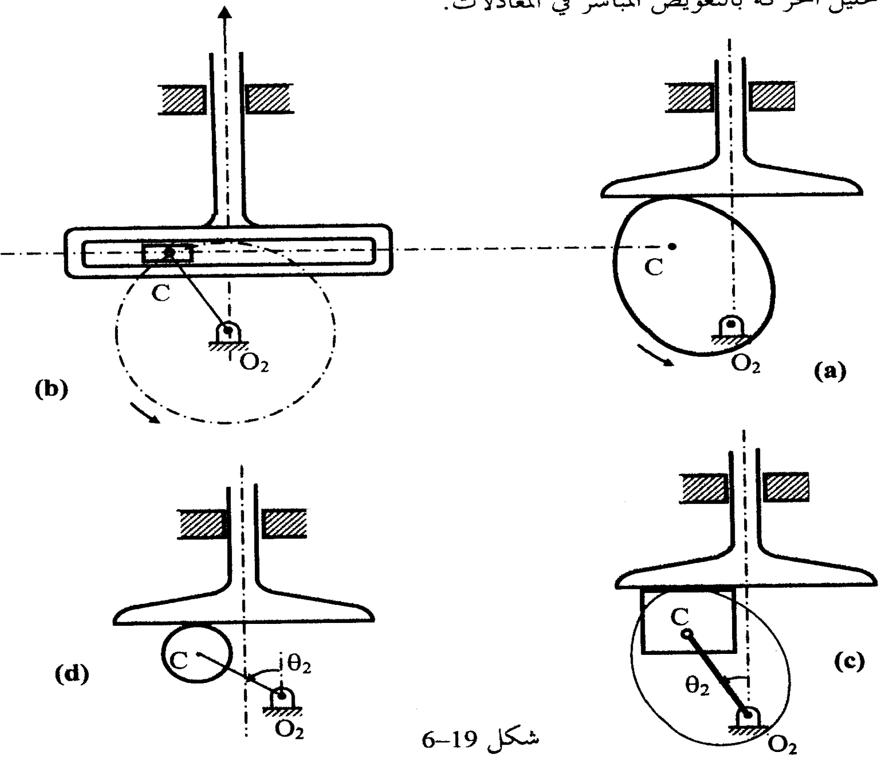
$$\omega_4 = \frac{V_C}{r} = 25.58 \text{ rad/s}$$ (عكس عقرب الساعة)

$$\alpha_4 = \frac{A_C}{r} = 122.99 \text{ rad/s}^2$$ (مع عقرب الساعة)



6.3 الحالات المكافئة لآلية الحركة التوافقية

بعض الآليات تتحرك لحظيا حركة مكافئة تماما لحركة آلية الحركة التوافقية Scotch yoke ولاشك أن هذه خاصية مفيدة في حل مثل هذه الحالات وذلك لأننا قد تعرفنا على نتائج تحليل هذه الآلية في الفصل الرابع بحيث يصبح من السهل هنا تحليل الحركة بالتعويض المباشر في المعادلات.



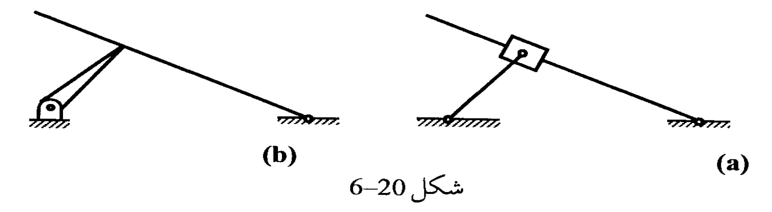
شكل 6–19

فمثلا شكل 6–19(a) يبين كامة مع تابع مسطح flat-faced follower والحركة في اللحظة المبينة مكافئة لحركة الآلية المبينة في شكل 6–19 (b) على شرط أن يكون الطول O_2C متساويا في الحالتين مقدارا واتجاها. وكذلك حركة الآليتين المبينتين في

شكلي (c) , (d) 19–6 فكل منهما تكافئ الآلية المبينة في شكل (b) 19–6 بنفس الشرط السابق.

6.4 الحالات المكافئة لآلية المنـزلق المعكوس

في الفصل الخامس تم تحليل آلية المنـــزلق المعكوس inverted slider–crank mechanism المبينة في شكل (a) 20–6 . والآلية المبينة في شكل (b) 20–6 مكافئة لها تماما بشرط تساوي الأبعاد والزوايا. وهناك آليات أخرى مكافئة لآلية المنـــزلق المعكوس مع بعض التعديل عليها. ويبين شكلي 21–6 , 22–6 أمثلة على ذلك.

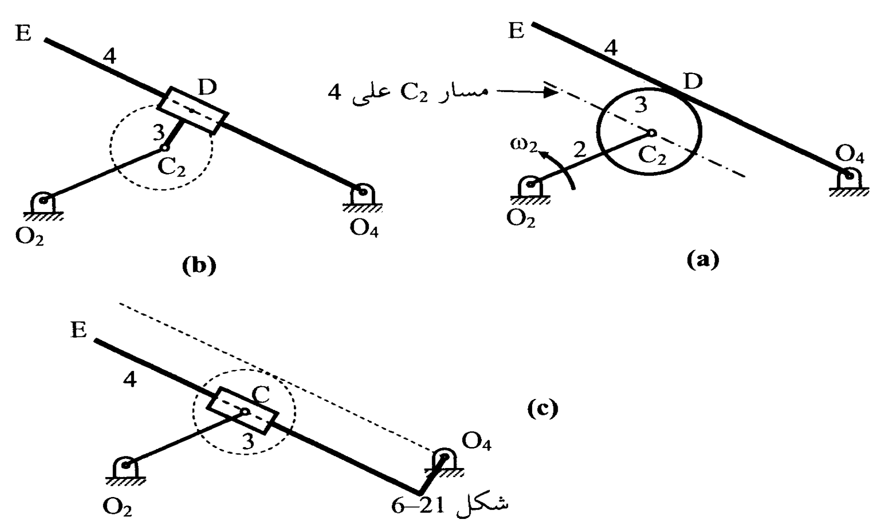


شكل 20–6

ففي شكل (a)21–6 يدور الذراع O_2C_2 فيجبر الذراع O_4E على الدوران نتيجة للتلامس المباشر بينه وبين العجلة 3 . وبالنسبة لشخص مثبت في الذراع O_4E ويدور معه فإن النقطة C_2 ، وهي مركز العجلة ، تتبع مسارا موازيا للذراع O_4E وهذا المسار يعرف بالمسار الظاهري للنقطة C_2 على الضلع 4 وذلك للتفرقة بينه وبـــين المسار المطلق الذي يراه القارئ وهو دائـــرة مركزها O_2. والآلية المكافئة هي آلية المنـــزلق المعكوس المعدلة ، وهي موضحة في شكل (b)21–6 حيث نرى أن النقطة C_2 تتحرك على الضلع 4 على بعد C_2D يساوي نصف قطر العجلة. ويوضح شكل (c)21–6 صورة أخرى من الآلية المكافئة. والثلاث آليات المبينة في شكـــل 21–6 لها نفس الإزاحات والسرعات والعجلات .

أما شكل (a)22–6 فيوضح مثالا آخر حيث يدور الذراع التابع 4 نتيجة لدوران الكامة 2 ، وهي مكافئة للآلية المبينة في شكل (b)22–6 حيث C هي مركز انحناء سطح الكامة عند نقطة تلامسها مع التابع (أي النقطة E). ويمكن تحليل هذه الآلية باستعمال أي من الطرق التي سبقت مناقشتها في الفصول الثلاثة السابقة ،

ولكننا سنستعرض فيما يلي الحل باستعمال طريقة التفاضل العددي.



شكل 6–21

تكون نقطة الأصل هي O_2 لأنها مركز عمود الإدارة (المعلومة سرعته الزاوية ω_2 وعجلته الزاوية α_2) ويكون المحور x في اتجاه خط المراكز O_2O_4 . يرمز للطول O_4C بالرمز s وللطول O_2C بالرمز R. ومن المثلث O_4CO_2 باستخدام cosine rule ثم sine rule يكون:

$$s = \sqrt{R^2 + L^2 - 2RL\cos\theta_2} \tag{6–2}$$

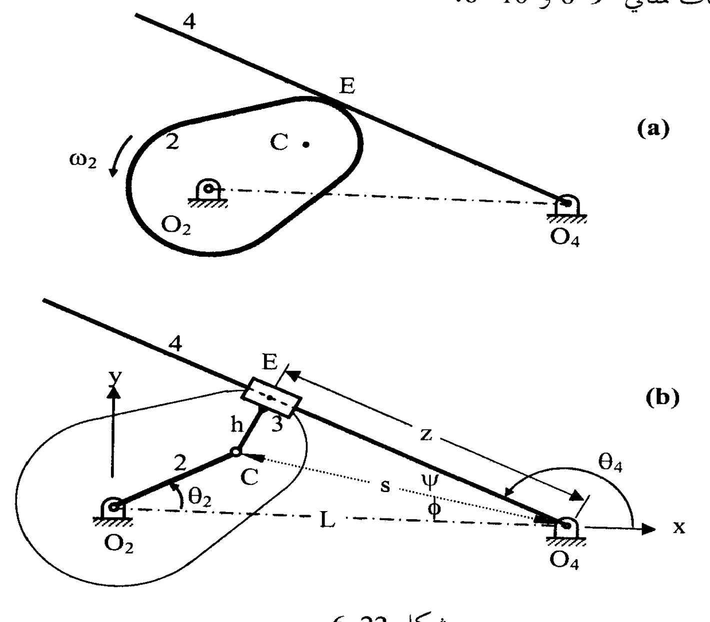
$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{R\sin\theta_2}{s}\right) \tag{6–3}$$

$$\psi = \sin^{-1}\left(\frac{h}{s}\right) \tag{6–4}$$

$$\theta_4 = 180^\circ - \phi - \psi \tag{6–5}$$

حيث h هي نصف قطر انحناء الكامة عند نقطة التلامس مع التابع (أي المسافة CE).

ويتم الحصول على السرعة والعجلة للأضلاع باستعمال طريقة التفاضل العددي ، ويحتوي جدول 2–6 برنامج كمبيوتر مكتوب بلغة فورتران ويمكن استعماله لإجراء الحسابات لمثالي 9–6 و 10– 6.



شكل 22–6

مثال 9–6

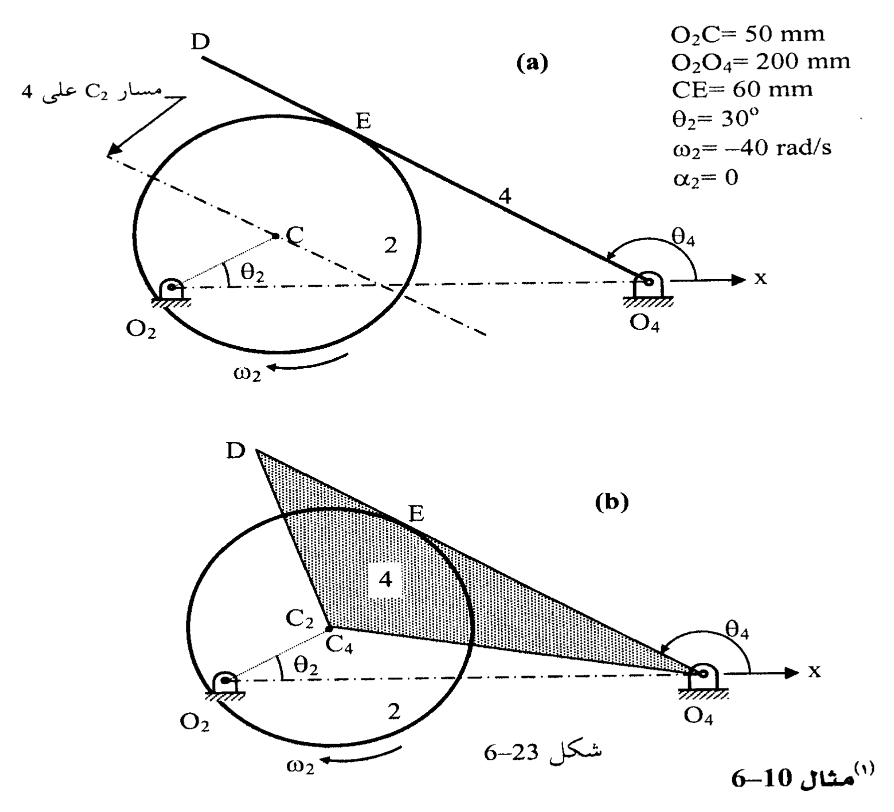
تدور الكامة 2 المبينة في شكل 23(a)–6 بسرعة زاوية منتظمة في اتجاه عقرب الساعة مقدارها $\omega_2 = 40$ rad/s . احسب السرعة والعجلة الزاوية للذراع 4.

الحل:ملخص المعطيات:

R= 50 mm, h= 60mm , L=200 mm, $\theta_2 = 30^o$, $\omega_2 = -40$ rad/s, $\alpha_2 = 0$

والجدول الآتي يبين نتائج برنامج الكمبيوتر (الزوايا بالدرجات).

S, mm	ϕ	ψ	θ_4	ω_4 rad/s	α_4 rad/s^2
158.68	9.06	22.22	148.72	6.54	616.34



شكل 6-23

مثال 6-10[1]

احسب السرعة والعجلة الظاهرية لمركز الكامة (النقطة C_2 وهي منطبقة على النقطة C) المبينة في شكل 6-23(a) كما يراها شخص ملتصق مع الذراع O_4E ويتحرك معه، وذلك باستعمال طريقة التفاضل العددي. (ملحوظة: جدول 2-6 يحتوي على البرنامج المكتوب بلغة فورتران الذي يمكن استعماله لإجراء الحسابات لهذا

(١) يعتبر هذا المثال مقدمة لموضوع الحركة الظاهرية وستتم مناقشة هذا الموضوع بتفصيل أكبر في الفصل الثامن الذي يناقش السرعة الظاهرية والفصل التاسع الذي يناقش العجلة الظاهرية ولذلك فربما يفضل بعض القراء الانتقال مباشرة إلى الفقرة التالية والعودة إلى هذا المثال فيما بعد عند دراسة هذين الفصلين للمقارنة مع النتائج التي يتم الحصول عليها هناك باستعمال مضلعي السرعة والعجلة.

المثال وكذلك لمثال (6–9)

الحل: لابد من التفرقة بين النقطة C_2 وهي مركز الكامة وبين نقطة أخرى هي C_4 منطبقة على C_2 في اللحظة المبينة بالرسم ولكنها جزء لا يتجزأ من الضلع 4 (حيث يمكن تخيل هذا الضلع كأنه لوح على هيئة المثلث O_4DC_4 المبين في شكـــل 6–23(b) علما بأن حركة الآلية لا تتأثر نهائيا بهذا التغير في شكل الضلع 4). وبعد مرور فترة زمنية قصيرة ، تتحرك C_2 مع الكامة بينما تتحرك C_4 مع الضلع 4 وتنفصل النقطتان عن بعضهما. فإذا التصق شخص مع الذراع O_4D وتحرك معه فإنه يرى مركز الكامة C_2 يتحرك فقط على مسار موازي للذراع O_4E كما هو مبين بالشكل ، وهذه الحركة هي الحركة الظاهرية لمركز الكامة ، أي هي مسار C_2 على الضلع 4. ويمكن إيجاد سرعة النقطة C_2 بإيجاد إحداثياتها وملاحظة أن $O_2C= R$ (نقطة الأصل هي O_2):

$$x_{C_2} = R\cos(\theta_2)\ ,\ y_{C_2} = R\sin(\theta_2)$$

وبإجراء عملية التفاضل العددي لهاتين المعادلتين مرتين نحصل على مركبات السرعة V_{C_2} ومركبات العجلة A_{C_2} كما في جدول 6–1.

وبالمثل يمكن إيجاد سرعة النقطة C_4 بإيجاد إحداثياتها وملاحظة أن $O_4C = s$:

$$x_{C_4} = -(s)\cos(\phi)\qquad ,\ y_{C_4} = (s)\sin(\phi) \qquad (6\text{–}6a)$$

حيث الزاوية ϕ تساوي من المعادلة (6–3):

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{R\sin\theta_2}{s}\right)$$

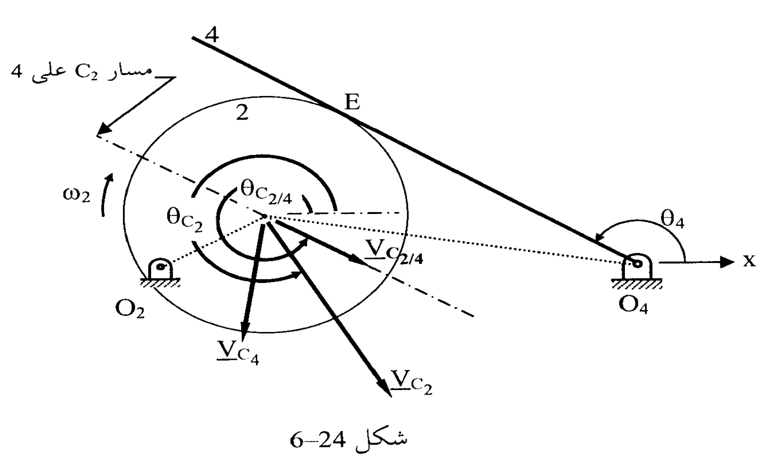
وبإجراء عملية التفاضل العددي للمعادلتين (6–6) مرتين نحصل على مركبات السرعة V_{C_4} ومركبات العجلة A_{C_4} كما في جدول 6–1.

جدول 6–1

	V_c^x	V_c^y	V_c	θ_v	A_c^x	A_c^y	A_c	θ_A
C_2	1000	–1732	2000	300	–69 282	–40 000	80 000	210
C_4	–163.5	–1025	1038.1	260.94	–8 702.4	–97 650	98 037	$264.91 = \theta_{C_4}$
$C_{2/4}$	1163.5	–706.9	1361.5	– 31.28	–60 579.6	57 650	93 626.7	$136.42 = \theta_{C_{2/4}}$

ومن الجدول يتضح أن السرعتين $\underline{V}_{C_2}$ و $\underline{V}_{C_4}$ مختلفتان مقدارا واتجاها رغم التطابق اللحظي بين C_4, C_2 . والفرق بين السرعتين هو السرعة الظاهرية apparent velocity ويرمز لها $\underline{V}_{C_{2/4}}$ وهي تمثل سرعة النقطة C_2 (التي هي مركز الكامة) كما تظهر لشخص مثبت في ويتحرك مع الذراع وتحسب من المعادلة:

$$\underline{V}_{C_{2/4}} = \underline{V}_{C_2} - \underline{V}_{C_4} \qquad (6\text{–}6b)$$



شكل 6–24

وهذه السرعة الظاهرية تكون في اتجاه مسار C_2 على الذراع 4. ويبين شكل 6–24 السرعة الظاهرية $\underline{V}_{C_{2/4}}$ والسرعتين المطلقتين $\underline{V}_{C_2}$ و $\underline{V}_{C_4}$.

والعجلتان المطلقتان $\underline{A}_{C_2}$ و $\underline{A}_{C_4}$ مختـــلفتان مقدارا واتجاها رغم التطابق اللحظي بين C_2 و C_4 . والفرق بين العجلتين هو العجلة الظاهرية apparent acceleration ويرمز له بالرمز $\underline{A}_{C_{2/4}}$ ويحسب من المعادلة:

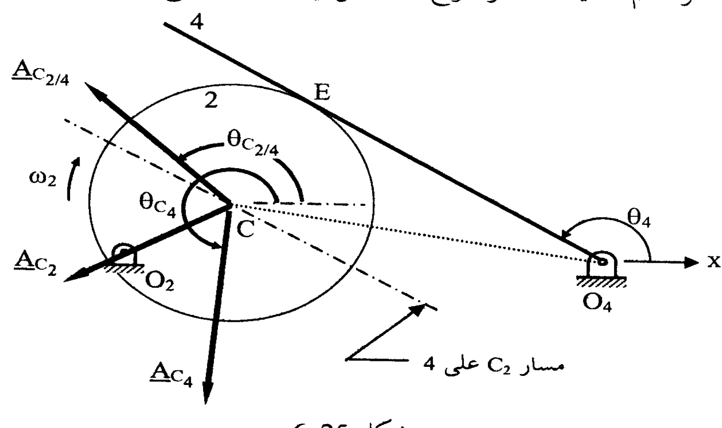
$$\underline{A}_{C_{2/4}} = \underline{A}_{C_2} - \underline{A}_{C_4} \qquad (6\text{–}7)$$

وهذه العجلة الظاهرية $\underline{A}_{C_{2/4}}$ المبينة في شكل 6–25 **ليست** في اتجاه مسار C_2 على الذراع 4 كما كان الحال في حالة السرعة الظاهرية ، بل إنها تعتمد على مركبة إضافية هي عجلة كوريولس Coriolis acceleration (يرمز لها $A^c_{C_2C_4}$) وتظهر عند دراسة حركة جسمين متحركين بالنسبة لبعضهما مثل انزلاق نقطة C_2 على الذراع

4 في المسألة الحالية، واتجاهها دائما عموديا على المسار الظاهري للنقطة C_2 على الذراع. وتحسب $A^c_{C_2C_4}$ من:

$$\underline{A}^c_{C_2C_4} = 2\,\underline{\omega}_4 \times \underline{V}_{C_2/4} \qquad (6\text{–}8)$$

وستتم تغطية هذا الموضوع بالتفصيل في الفصل التاسع.



شكل 6–25

جدول 6–2

برنامج لتحليل آلية المنـــزلق المعكوس باستعمال التفاضل العددي

```
c Program to analyze  the inverted crank–slider mechanism using numerical
c     differentiation; Cam problem of example 6–9 and 6–10

      implicit real*8 (a–h,o–z)
      real*8  L,th2(3),s(3),phi(3), psi(3), z(3),th4(3)
     +        ,yc4(3),xc3(3),yc3(3),xc4(3)

      OPEN(6,FILE='Ex6–9.OUT',STATUS='unknown')
c -------------------------   Input   ------------------
      r = 50
      L= 200
      h = 60
      w2 = – 40
      a2 = 0
      th2(2) = 30
      delta = 0.1
```

```
    write(6,*)  'R,L,h,theta2,w2(rad/s),a2 '
    write(6,99)  r,L,h, th2(2) ,w2,a2
99   format(9(f8.2,1x))
c ---------------------------------------------------------------
    pi = 4*datan(1)
    D2R = pi/180
c Convert angles to radians
    delta = delta*D2R
    th2(2) = th2(2)*D2R
    th2(1) = th2(2)-delta
    th2(3) = th2(2)+delta

c Calculation of s,z,theta4
       do 11 i=1,3
          s(i) = (r**2+L**2-2*r*L*dcos(th2(i)))**0.5
          phi(i) = dasin(r*dsin(th2(i))/s(i))
          psi(i) = dasin(h/s(i))
          z(i) = (s(i)**2-h**2)**0.5
          th4(i) = pi - phi(i)-psi(i)
 11    continue

    zs2= (z(3)-z(2))*w2/delta
    zs1= (z(2)-z(1))*w2/delta
    zs= (zs2+zs1)/2
    zss= (zs2-zs1)*w2/delta + a2/w2*zs
    ss2= (s(3)-s(2))*w2/delta
    ss1= (s(2)-s(1))*w2/delta
    ss= (ss2+ss1)/2
    sss= (ss2-ss1)*w2/delta + a2/w2*ss
    w4u= (th4(3)-th4(2))/delta
    w4L= (th4(2)-th4(1))/delta
    w4  = (w4u+w4L)/2 *w2
    a4  = (w4u - w4L)*w2**2/delta + a2/w2*w4
    th2Deg = th2(2)/D2R
    th4Deg = th4(2)/D2R
    phiDeg = phi(2)/D2R
    psiDeg = psi(2)/D2R
    write(6,*)  'theta2 , s,  z, phi , psi , theta4, w4 , a4'
    write(6,99)   th2Deg ,s(2),z(2), phiDeg , psiDeg , th4Deg, w4 , a4

c Calculation of velocity & acceleration of point C4
       do 44 i =1,3
          xc4(i) = - s(2)*dcos(pi-th4(i)-psi(2))
          yc4(i) = s(2)*dsin(th4(i)+psi(2))
 44    continue

    vxc42= (xc4(3)-xc4(2))*w2/delta
    vxc41= (xc4(2)-xc4(1))*w2/delta
    vxc4= (vxc42+vxc41)/2
    Axc4= (vxc42-vxc41)*w2/delta + a2/w2*vxc4
```

```
      vyc42= (yc4(3)–yc4(2))*w2/delta
      vyc41= (yc4(2)–yc4(1))*w2/delta
      vyc4= (vyc42+vyc41)/2
      Ayc4= (vyc42–vyc41)*w2/delta + a2/w2*vyc4

      vc4= (vxc4**2+vyc4**2)**0.5
      thv = datan(vyc4/vxc4)/D2R
      if(vxc4.lt.0) thv = thv+180

      Ac4 = (Axc4**2+Ayc4**2)**0.5
      thA = datan(Ayc4/Axc4) / D2R
      if(Axc4.lt.0) thA = thA+180

      write(6,*)      ' vc4,thv,  Ac4,thA'
      write(6,888)  vc4,thv,  Ac4,thA
888   format(4(f10.2,2x))

c Calculation of velocity & acceleration of point C2&C3
        do 33 i=1,3
           xc3(i) = r*dcos(th2(i))
           yc3(i) = r*dsin(th2(i))
33      continue

      vxc32 = (xc3(3)–xc3(2))*w2/delta
      vxc31 = (xc3(2)–xc3(1))*w2/delta
      vxc3 = (vxc32+vxc31)/2
      Axc3 = (vxc32–vxc31)*w2/delta + a2/w2*vxc3

      vyc32 = (yc3(3)–yc3(2))*w2/delta
      vyc31 = (yc3(2)–yc3(1))*w2/delta
      vyc3 = (vyc32+vyc31)/2
      Ayc3 = (vyc32–vyc31)*w2/delta + a2/w2*vyc3

      vc3 = (vxc3**2+vyc3**2)**0.5
      thv = datan(vyc3/vxc3)/D2R
      if(vxc3.lt.0) thv = thv+180

      Ac3= (Axc3**2+Ayc3**2)**0.5
      thA= datan(Ayc3/Axc3)/D2R
      if(Axc3.lt.0) thA = thA+180

      write(6,*)  ' vc2,thv,Ac2,thA'
      write(6,888)  vc3,thv,  Ac3,thA

c Calculation of apparent velocity Vc2/4 & acceleration Ac2/4
      vxc3_4 = vxc3–vxc4
      vyc3_4 = vyc3–vyc4
      vc3_4= (vxc3_4**2+vyc3_4**2)**0.5
      thv= datan(vyc3_4/vxc3_4)/D2R
      if((vxc3_4).lt.0) thv = thv+180
```

```
Axc3_4 = Axc3-Axc4
Ayc3_4 = Ayc3-Ayc4
Ac3_4 = (Axc3_4**2+Ayc3_4**2)**0.5
thA = datan(Ayc3_4/Axc3_4)/D2R
if((Axc3_4).lt.0) thA=thA+180

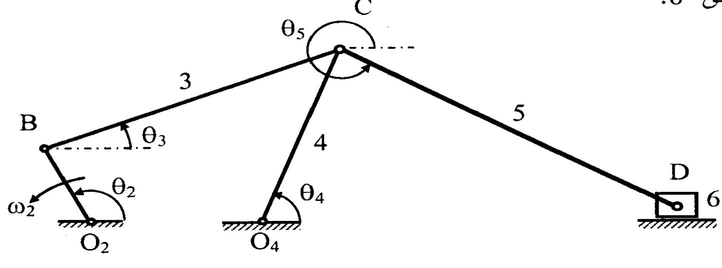
write(6,*)  ' vc2_4,thv  ,Ac2_4,thA'
write(6,888)  vc3_4,thv,  Ac3_4,thA

end
```

6.5 الآليات المركبة Compound Mechanisms

كل الآليات التي تمت دراستها حتى الآن كانت تتكون من حلقة مغلقة واحدة closed loop ولكن هناك الكثير من الآليات التي تتكون من عدة حلقات مغلقة بحيث تكون هناك أكثر من معادلة دائرة مغلقة واحدة.

ومثال ذلك الآلية الموضحة في شكل 26–6 والتي تتكون من الآلية الرباعية O_2BCO_4 وآلية المنـــزلق O_4CD . فإذا علمت زاوية الذراع الدوار O_2B وسرعته وعجلته فإن الحل يبدأ بتحليل الآلية الرباعية لإيجاد الزوايا θ_3 , θ_4 والسرعات ω_3 , ω_4 والعجلات α_3 , α_4 . وتسمى هذه الآلية مركبة لأن هذه النتائج تستعمل لحل الحلقة التالية من الآلية وهي آلية المنـــزلق O_4CD ، فتكون المعطيات في هذه الحـــالة هي θ_4 , ω_4 , α_4 ويتم من الحل إيجاد θ_5 , ω_5 , α_5 وكذلك موضع وسرعة وعجلة المنـــزلق 6.

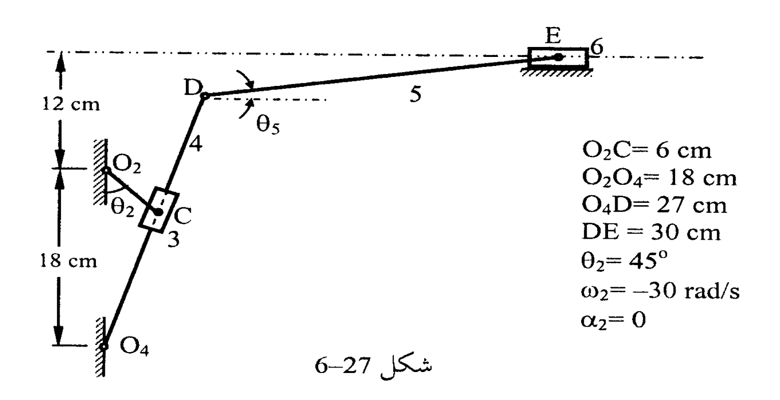


شكل 26–6

مثال 11–6

في آلية العودة السريعة المبينة في شكل 27–6 يدور الذراع O_2C مع عقرب

الساعة بسرعة منتظمة $\omega_2 = 30$ rad/s . احسب السرعة والعجلة الزاوية للضلعين 5 , 4 والسرعة والعجلة الخطية للنقطتين E , D في اللحظة المبينة بالشكل .



شكل 27–6

الحل: هذه الآلية تتكون من حلقتين مقفلتين: الأولى هي آلية المنـــزلق المنعكس (الذراع O_2C والأضلاع 3 , 4) ، والثانية هي آلية المنـــزلق المنحرف (الأضلاع 6 , 4 , 5). والحل يبدأ بالحلقة المقفلة الأولى لأن سرعة ذراع الدوران O_2C معلومة. ويمكن الحل باستعمال الطرق الهندسية أو باستعمال جبر المتجهات بالأعداد المركبة ، ولكننا سنستعمل طريقة التفاضل العددي لتحليل هذا الجزء من الآلية كما في مثال 5– 4 وبرنامج الكمبيوتر الموضح في جدول 7–5 ، وتكون المعطيات input data هي

$r = O_2C = 6$ cm, $L = O_2O_4 = 18$ cm, $O_4D = 27$ cm, $\theta_2 = 45°$, $\omega_2 = -30$ rad/s , $\alpha_2 = 0$

والنتائج هي:

$\theta_4 = 162.9°$, $\omega_4 = 5.84$ rad/s CCW, $\alpha_4 = 460.78$ rad/s^2 CCW

واتجاه كل من α_4 , ω_4 هو عكس عقرب الساعة (CCW) ، أما الزاوية θ_4 فهي مبينة في شكل 28–6 وهي الزاوية بين الذراع 4 والاتجاه الرأسي. أما بالنسبة لسرعة وعجلة النقطة D فكانت النتائج هي:

$V_D = 157.76$ cm/s, $A_D = 12\ 475.11$ cm/s^2

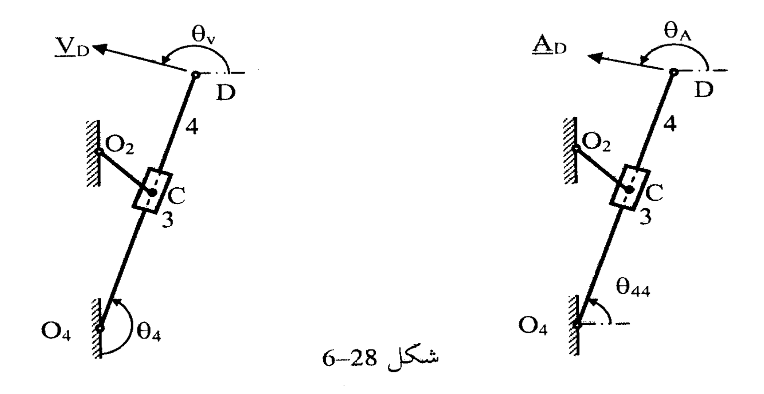
واتجاه السرعة $\underline{V}_D$ عمودي على الذراع O_4D أي أن زاويتها مع الأفقي هي

$\theta_V = 162.86^\circ$ ، أما العجلة $\underline{A}_D$ فزاويتها مع الأفقي هي $\theta_A = 167.1^\circ$ كما هو موضح في شكل 28–6.

والآلية الثانية وهي آلية المنـــزلق المنحرف ويمكن تحليلها باستعمال الطرق الهندسية أو باستعمال طريقة التفاضل العددي ، ولكننا سنستعمل لتحليل هذا الجزء من الآلية معادلات 12–4 و 15–4 و 16–4 و 18–4 و 19–4 والتي استنتجت في الفصل الرابع باستعمال جبر المتجهات بالأعداد المركبة ، وتكون المعطيات input data في هذه الحالة هي:

$R = O_2D = 27$ cm, $L = DE = 30$ cm, $r_0 = +30$ cm, $\theta_{44} = 162.9 - 90 = 72.9^\circ$,
$\omega_4 = 5.84$ rad/s , $\alpha_4 = 460.78$ rad/s^2

والزاوية θ_{44} هي الزاوية بين الذراع 4 والاتجاه الأفقي فنحصل على النتائج التالية:



شكل 28–6

$$\theta_5 = \sin^{-1}\left(\frac{r_0 - R\ \sin\theta_{44}}{L}\right) = 8.305^\circ \qquad (4\text{–}12)$$

$$\omega_5 = \frac{-R\ \cos\theta_{44}}{L\ \cos\theta_5}\,\omega_4 = -1.57 \text{ rad/s} \qquad (4\text{–}15)$$

$$\alpha_5 = [R(\omega_4^2\ \sin\theta_{44} - \alpha_4\cos\theta_{44}) + \omega_5^2\, L\sin\theta_5]/(L\cos\theta_5) = -93.2 \text{ rad/s}^2 \qquad (4\text{–}18)$$

واتجاه كل من α_5 , ω_5 هو مع عقرب الساعة (CW) لأن إشارتهما سالبة.

$$V_E = -\omega_4\ R\ \sin\theta_{44} - \omega_5\, L\ \sin\theta_5 = -144.18 \text{ cm/s} \qquad (4\text{–}16)$$

$$A_E = -R(\omega_4^2 \cos \theta_{44} + \alpha_4 \sin \theta_{44}) - L(\omega_5^2 \cos \theta_5 + \alpha_5 \sin \theta_5) = -11\ 840.6 \text{ cm/s}^2 \quad (4\text{–}19)$$

واتجاه كل من $\underline{A}_E$, $\underline{V}_E$ كما يظهر من نتائج المعادلات هو أفقي ناحية اليسار لأن إشارتهما سالبة.

خاتمة الفصل السادس

عرض هذا الفصل نماذج من الآليات التي تحتوي على أضلاع تنـــزلق على بعضها وبين أن معادلات الموضع لها تتطابق مع معادلات الموضع لبعض الآليات البسيطة مثل الآلية الرباعية أو آلية المنـــزلق وعلى هذا يمكن تحليل حركة هذه الآليات المعقدة باستعمال الطرق التي استعملت لتحليل الآليات المكافئة البسيطة مثل الطرق الهندسية أو الأعداد المركبة أو الطرق العددية. ويجب التأكيد على أن تكافؤ آلية معينة مع إحدى الآليات البسيطة معناه أن الزوايا والسرعات والعجلات الزاوية للأضلاع متساوية ، ولكن هذا لا يعني تساوي سرعات وعجلات كل النقاط في الآلية الأصلية مع النقاط المناظرة لها في الآلية المكافئة. ووضحت الأمثلة أنه في حالة تلامس أضلاع مقوسة فإنه يلزم استعمال متجه يحدد موضع كل مركز من مراكز التقوس . وتجدر الإشارة إلى أن الآليات المكافئة التي عرضت في هذا الفصل يمكن تحليلها أيضا بيانيا (بالرسم) بالطرق التي ستعرضها الفصول الثلاثة القادمة. وسيظهر للقارئ مدى ما تقدمه الآليات المكافئة من تبسيط في تحليل الآليات التي تحتوي على أضلاع تنـــزلق على بعضها بعد تقديم طريقة الحركة النسبية في الفصلين الثامن والتاسع ، وهي طريقة لتحليل مثل هذه الآليات (وغيرها) بطريقة مباشرة ولكنها تتطلب جهدا ووقتا أكثر بكثير من طريقة الآليات المكافئة ، وخاصة عند تحليل العجلات.

ثم عرض الفصل السادس طريقة تحليل الآليات المركبة التي تتكون من عدة آليات بسيطة ، وفي هذه الحالة يبدأ الحل لأول آلية بسيطة منها ثم تستعمل النتائج لحل الآلية التالية وهكذا حتى ينتهي تحليل الآلية بالكامل.

الفصل السابع

تحليل السرعة باستعمال المراكز اللحظية

Velocity Analysis Using Instant Centers

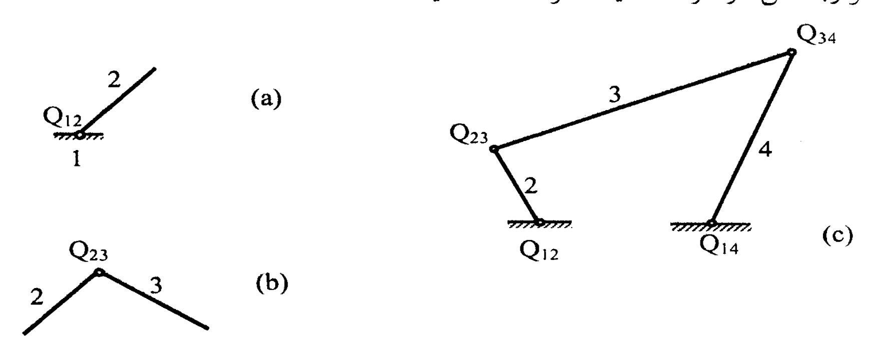
ركزت الفصول السابقة على استعمال الطرق التحليلية والعددية لدراسة الحركة. وكان الحل يبدأ بإيجاد معادلة اتجاهية تمثل موضع وصلات الآلية ثم حل هذه المعادلة لإيجاد الإزاحة والسرعة والعجلة. وفي هذا الفصل نستعرض طريقة لإيجاد السرعة باستعمال المراكز اللحظية للسرعة Instantaneous centers of velocity ، وهذه الطريقة لا تستلزم كتابة معادلة اتجاهية للموضع . ويبدأ هذا الفصل باستعراض كيفية تعيين المراكز اللحظية للسرعة ، ثم يشرح بعد ذلك كيفية إيجاد السرعة باستعمال هذه المراكز اللحظية.

وترجع أهمية تحليل السرعة في الآليات إلى سببين ، أولهما أن زمن أداء المهمة المطلوبة من الآلية يعتمد أساسا على سرعة حركة أجزائها. أما السبب الثاني فهو أن القدرة power التي تنقلها الآلية هي حاصل ضرب القوة في السرعة ، ومعلوم أنه دائما من المستحب تقليل مقدار القوى في أجزاء الآلية لأنها تسبب إجهادات وتآكل في هذه الأجزاء ولهذا فإن تحليل السرعة يساعد على التحكم في مستويات القوي في الآلية عن طريق تغيير أبعادها والحصول على سرعات تجعل مقادير هذه القوى مناسبة.

7.1 تعريف المراكز اللحظية للسرعة

عندما يتحرك ضلعان في مستوى واحد فإنه توجد نقطة Q_i على أولهما منطبقة على نقطة Q_j على ثانيهما بحيث تكون سرعتاهما المطلقة متساوية. مثل هذه النقط تسمى المركز اللحظي للسرعة بين الضلعين i , j . ففي شكل (a) 1–7 مثلا يرتبط الضلعان 1,2 بوصلة دورانية (hinge) تجعل النقطة Q_1 على الضلع 1 منطبقة دائما على النقطة Q_2 على الضلع 2 بحيث إن سرعة كل منهما صفرا ، وهاتان النقطتان المنطبقتان يرمز لهما في الشكل بالرمز Q_{12}. أما في شكل (b) 1–7 فإن النقطة Q_3 على الضلع 3 تكون منطبقة على النقطة Q_2 على الضلع 2 بحيث إن سرعتاهما متساوية مقدارا واتجاها (هاتان النقطتان منطبقتان دائما بسبب طبيعة الوصلة بين الضلعين

ويرمز لهما في الشكل بالرمز Q_{23}). ويوضح شكل (c) 1-7 آلية الأضلاع الأربعة وأربعة من المراكز اللحظية للسرعة لهذه الآلية.



شكل 1-7

7.2 عدد المراكز اللحظية للسرعة

يلاحظ أنه يوجد مركز لحظي للسرعة بين كل ضلعين من أضلاع الآلية ، أي أن العدد الكلي للمراكز اللحظية للسرعة (N) هو:

$$N = \frac{m(m-1)}{2} \tag{7-1}$$

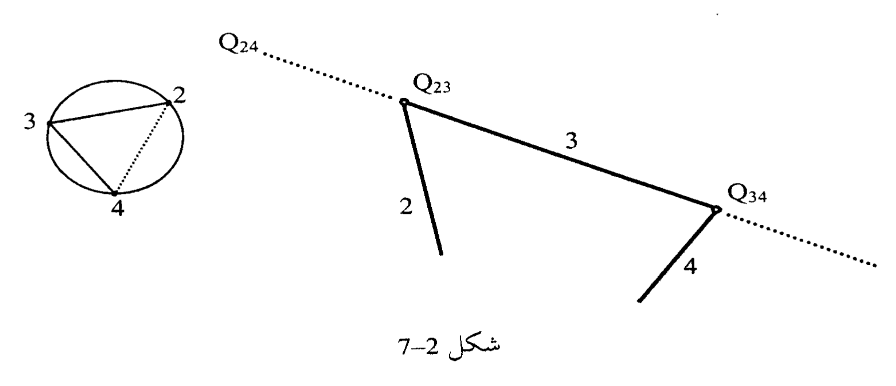
حيث m هو عدد أضلاع الآلية.

فإذا طبقنا هذه المعادلة على آلية الأربعة أضلاع الموضحة في شكل (c) 1-7 نجد أن $N = 6$ أي أن عدد المراكز اللحظية هو ستة ، منها أربعة مبينة في الشكل وهذه تسمى المراكز الأولية primary centers لأنها تحدد مباشرة من طبيعة الوصلات (joints) في الآلية. أما باقي المراكز اللحظية فيتم تعيينها باستعمال نظرية كنيدي Kennedy's theorm.

7.3 نظرية كنيدي

تنص هذه النظرية على أن المراكز اللحظية للسرعة لكل ثلاثة أضلاع تقع على استقامة واحدة. وكمثال على ذلك يبين شكل 2-7 المراكز اللحظية الأولية

Q_{34} , Q_{23} وهي الوصلات الدورانية hinges ، وفي هذه الحالة يجب أن يكون المركز اللحظي الثالث Q_{24} على خط مستقيم مع هذه المراكز الأولية Q_{34} , Q_{23} كما هو موضح في الشكل بالخط المتقطع. أما الموضع الصحيح للمركز اللحظي Q_{24} فيتحدد بأخذ باقي أضلاع الآلية في الاعتبار كما سيتم توضيحه فيما يلي. وعادة تستخدم دائرة (بأي قطر) كالمبينة على يسار الشكل لبيان علاقة المراكز اللحظية للسرعة ببعضها حيث توضع أرقام الأضلاع على محيط الدائرة ، ويمثل كل وتر في الدائرة مركزا لحظيا بعد أن يتم تحديد ذلك المركز ، بحيث يمثل الخط 23 المركز اللحظي Q_{23} ويمثل الخط 34 المركز اللحظي Q_{34} ويمثل الخط 24 المركز اللحظي الثالث Q_{24} ، وتكون هذه الخطوط الثلاثة مثلثا داخل الدائرة وهذه خاصية لكل ثلاثة مراكز لحظية على استقامة واحدة.



شكل 2–7

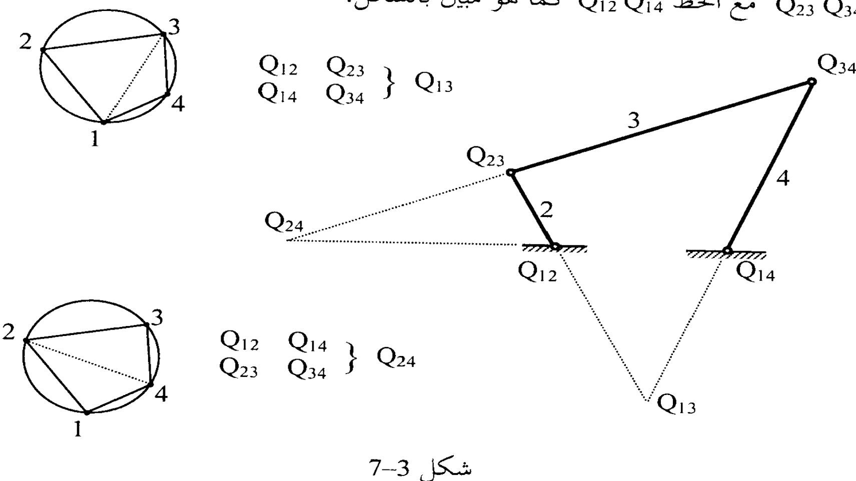
مثال 1–7

عين المراكز اللحظية للسرعة لآلية الأربعة أضلاع المبينة في شكل 3–7.

الحل:

بتطبيق المعادلة (1–7) نجد أن $N = 6$ أي أن عدد المراكز اللحظية هو ستة ، منها أربعة مراكز أولية primary centers تحدد مباشرة من طبيعة الوصلات (hinges) في الآلية وهي المراكز Q_{34} , Q_{14} , Q_{12} , Q_{23} . وتظهر هذه المراكز الأربعة كأربعة أوتار

في الدائرة المبينة أعلى يسار الشكل والتي وضعت أرقام الأضلاع على محيطها[١]. أما المركز اللحظي Q_{13} فيتم تعيينه باستعمال نظرية كنيدي وبمساعدة الدائرة حيث يمثل الخط المتقطع 13 هذا المركز اللحظي ، ولأن هذا الخط يكون مثلثا مع الخطين 23 , 12 يكون المركز Q_{13} على خط مستقيم مع المركزين Q_{23} , Q_{12} ، وفي نفس الوقت يكون الخط المتقطع 13 مثلثا مع الخطين 34 , 14 مما يعني أن المركز Q_{13} يقع على خط مستقيم أيضا مع المركزين Q_{34} , Q_{14} ، وبذلك يتم تعيين المركز اللحظي Q_{13} من تقاطع الخط $Q_{12}\,Q_{23}$ مع الخط $Q_{14}\,Q_{34}$ كما هو مبين بالشكل. أما المركز اللحظي Q_{24} فيتم تعيينه بنفس الطريقة وبمساعدة الدائرة المرسومة أسفل يسار الشكل حيث يمثل الخط المتقطع 24 هذا المركز مما يعني أن المركز Q_{24} يتم تعيينه من تقاطع الخط $Q_{12}\,Q_{14}$ مع الخط $Q_{23}\,Q_{34}$ كما هو مبين بالشكل.



شكل 3–7

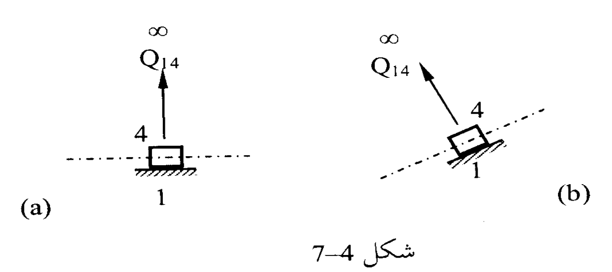
ويجب ملاحظة أن مواضع مراكز السرعة الستة التي تم تعيينها في المثال وتظهر في شكل 3–7 هي مراكز لحظية أي أنها صحيحة في وضع الآلية المبين بالشكل ولكن

(١) أرقام الأضلاع وضعت على محيط الدائرة على مسافات غير متساوية عمدا للتأكيد على أن هذه الدائرة لا تقاس منها أي أبعاد وإنما تستعمل فقط للإرشاد عند تطبيق نظرية كنيدي.

بعضها تتغير مواضعه مع الزمن نتيجة لحركة أضلاع الآلية.

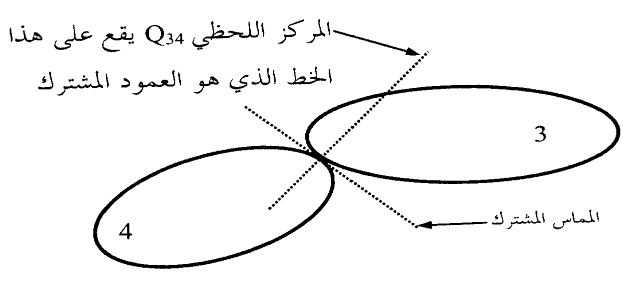
7.4 أنواع المراكز اللحظية الأولية

المراكز اللحظية الأولية primary centers تحدد مباشرة من طبيعة الوصلات (joints) في الآلية وأول نوع منها هو الوصلات الدورانية hinges الموضحة في الأشكال السابقة . أما النوع الثاني فهو حالة انزلاق سطوح مستوية على بعضها وفي هذه الحالة يكون اتجاه موضع المركز اللحظي عموديا على سطح الانزلاق وموقعه على بعد لانهائي (∞) من سطح الانزلاق كما هو موضح في شكل (b) ,(a) 4–7 .



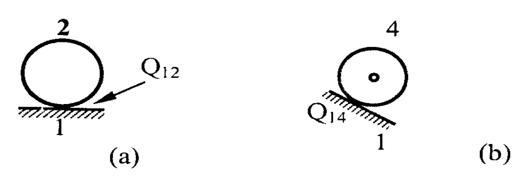
شكل 4–7

أما النوع الثالث فهو حالة انزلاق سطحين مقوسين على بعضهما مع دورانهما بالنسبة لبعضهما sliding and rolling contact وفي هذه الحالة فإن المركز اللحظي يقع على العمود المشترك لسطحي الانزلاق ، وموقعه غير محدد كما هو موضح في شكل 5–7 .



شكل 5–7

ويوضح شكل 6–7 النوع الرابع وهو حالة التلامس الدوراني rolling contact والذي يعني أن أحد الضلعين المتلامسين يدور على الآخر بدون انزلاق (حالة pure rolling) وفي هذه الحالة يكون المركز اللحظي للسرعة بين الجسمين المتلامسين هو نفسه نقطة التلامس .



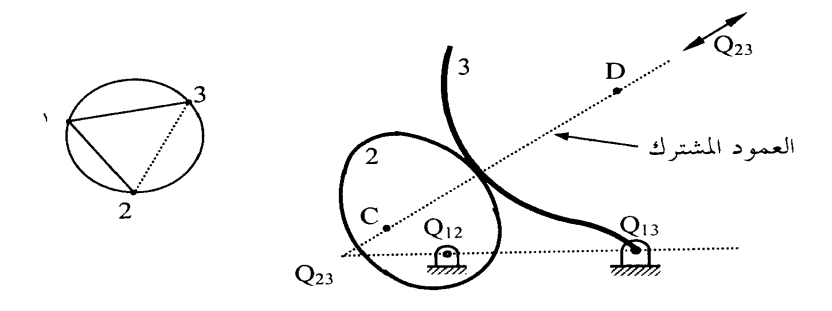
شكل 6–7

مثال 2–7

عين المراكز اللحظية للسرعة للآلية المبينة في شكل 7–7 علما بأن C و D هما مركزي التقوس للجسمين عند نقطة التلامس.

الحل:

بتطبيق المعادلة (1–7) نجد أن N = 3 أي أن عدد المراكز اللحظية هو ثلاثة ، اثنان منها مراكز أولية primary centers تحددان مباشرة من طبيعة الوصلات (hinges) في الآلية وهما المركزان Q_{12} Q_{13} ويظهرا كوترين في الدائرة المبينة على يسار الشكل والتي وضعت أرقام الأضلاع على محيطها. أما المركز اللحظي Q_{23} فيقع على العمود المشترك لسطحي الانزلاق (أي الخط CD) ، وموقعه غير محدد كما هو موضح في شكل 7–7 . أما موضع هذا المركز اللحظي Q_{23} فيتم تعيينه باستعمال نظرية كنيدي وبمساعدة الدائرة حيث يمثل الخط المتقطع 23 هذا المركز اللحظي ، ولأن هذا الخط يكون مثلثا مع الخطين 13 , 12 يكون المركز Q_{23} على خط مستقيم مع المركزين Q_{12} , Q_{13} ، وبذلك يتم تعيين المركز اللحظي Q_{23} من تقاطع الخط Q_{12} Q_{13} مع الخط CD كما هو مبين بالشكل.



شكل 7–7

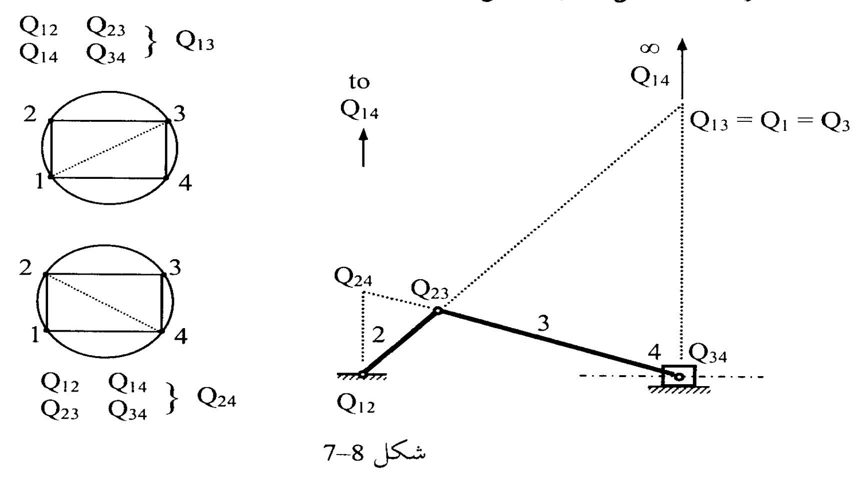
مثال 3–7

عين المراكز اللحظية للسرعة لآلية المكبس المبينة في شكل 8–7.

الحل:

بتطبيق المعادلة (1–7) نجد أن $N = 6$ أي أن عدد المراكز اللحظية هو ستة ، منها أربعة مراكز أولية primary centers تحدد مباشرة من طبيعة الوصلات في الآلية: ثلاثة تنطبق على الوصلات الدورانية (hinges) وهي المراكز Q_{34} , Q_{12} , Q_{23} ، والرابع Q_{14} يقع رأسيا (عموديا على اتجاه حركة المنـــزلق 4) في ∞. وتظهر هذه المراكز الأربعة كأربعة أوتار في الدائرة المبينة أعلى يسار الشكل والتي وضعت أرقام الأضلاع على محيطها. أما المركز اللحظي Q_{13} فيتم تعيينه باستعمال نظرية كنيدي وبمساعدة الدائرة حيث يمثل الخط المتقطع 13 هذا المركز اللحظي ، ولأن هذا الخط يكون مثلثا مع الخطين 12و23 يكون المركز Q_{13} على خط مستقيم مع المركزين Q_{23} , Q_{12} ، وفي نفس الوقت يكون الخط المتقطع 13 مثلثا مع الخطين 34 , 14 مما يعني أن المركز Q_{13} على خط مستقيم أيضا مع المركزين Q_{14}وQ_{34} ، وبذلك يتم تعيين المركز اللحظي Q_{13} من تقاطع الخط $Q_{12}\,Q_{23}$ مع الخط $Q_{14}\,Q_{34}$ كما هو مبين بالشكل ، وللتوضيح فإن حقيقة أن Q_{13} يتعين من تقاطع $Q_{12}\,Q_{23}$ مع $Q_{14}\,Q_{34}$ تظهر مكتوبة فوق الدائرة المبينة أعلى يسار الشكل.

أما المركز اللحظي Q_{24} فيتم تعيينه بنفس الطريقة وبمساعدة الدائرة المبينة أسفل يسار الشكل حيث يمثل الخط المتقطع 24 هذا المركز مما يعني أن المركز Q_{24} يتم تعيينه من تقاطع الخط $Q_{23}\,Q_{34}$ مع الخط $Q_{12}\,Q_{14}$ كما هو مبين بالشكل ، وللتوضيح أيضا فإن حقيقة أن Q_{24} يتعين من تقاطع $Q_{34}\,Q_{23}$ مع $Q_{12}\,Q_{14}$ تظهر مكتوبة تحت الدائرة المبينة أسفل يسار الشكل.



شكل 8-7

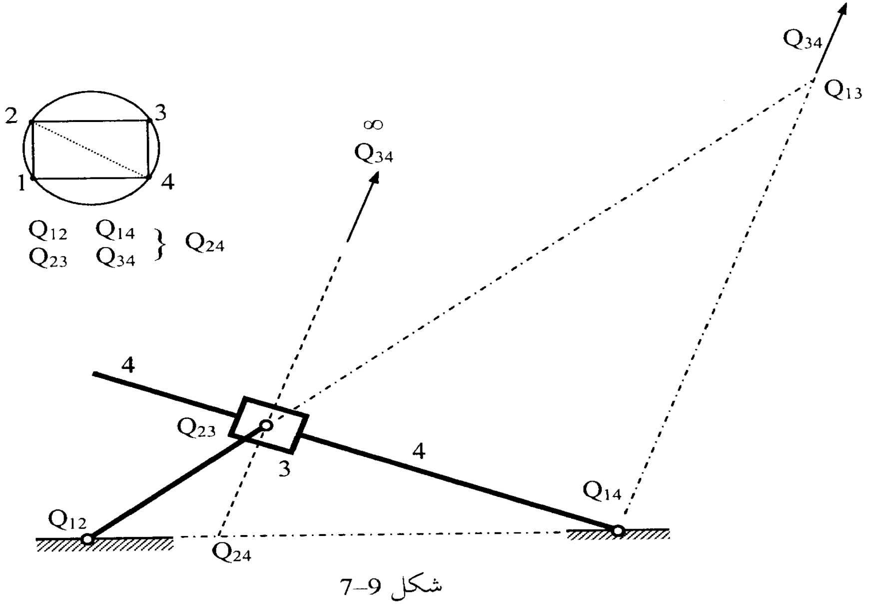
مثال 4-7

عين المراكز اللحظية للسرعة للآلية المبينة في شكل 9-7.

الحل:

بتطبيق المعادلة (1-7) نجد أن $N = 6$ أي أن عدد المراكز اللحظية هو ستة ، منها أربعة مراكز أولية primary centers تحدد مباشرة من طبيعة الوصلات في الآلية: ثلاثة تنطبق على الوصلات الدورانية (hinges) وهي المراكز Q_{14} , Q_{12} , Q_{23} ، والرابع Q_{34} يقع عموديا على اتجاه حركة المنـــزلق 3 في ∞. وتظهر هذه المراكز الأربعة كأربعة أوتار في الدائرة المبينة أعلى يسار الشكل والتي وضعت أرقام الأضلاع على محيطها.

أما المركز اللحظي Q_{24} فيتم تعيينه باستعمال نظرية كنيدي وبمساعدة الدائرة حيث يمثل الخط المتقطع 24 في الدائرة هذا المركز اللحظي ، ولأن هذا الخط يكون مثلثا مع الخطين 14 , 12 يكون المركز Q_{24} على خط مستقيم مع المركزين Q_{12}, Q_{14}، وفي نفس الوقت يكون الخط المتقطع 24 مثلثا مع الخطين 34 , 23 مما يعني أن المركز Q_{24} على خط مستقيم أيضا مع المركزين Q_{23} و Q_{34} ، وبذلك يتم تعيين المركز اللحظي Q_{24} من تقاطع الخط $Q_{12}\,Q_{14}$ مع الخط $Q_{23}\,Q_{34}$ كما هو مبين بالشكل.



شكل 9–7

والمركز اللحظي Q_{13} فيتم تعيينه بنفس الطريقة من تقاطع الخط $Q_{12}\,Q_{23}$ مع الخط $Q_{14}\,Q_{34}$ كما هو مبين بالشكل.

. يلاحظ أن أي خط من المركز اللحظي Q_{34} الذي يقع في ∞ يكون دائما عموديا على الضلع 4 لأن هذا الضلع يمثل خط انزلاق الضلع 3 على الضلع 4 ولذلك يكون

الخط $Q_{34}\,Q_{14}$ عموديا على الضلع 4 .

7.5 تحليل السرعة باستخدام المراكز اللحظية

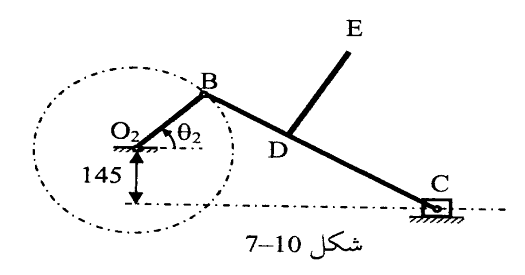
يتم أولا تعيين المراكز اللحظية باستخدام رسم دقيق للآلية ، ثم تقاس من الشكل المسافات بين هذه المراكز اللحظية (أو تحسب باستخدام أساسيات الهندسة المستوية). بعد ذلك يستخدم التعريف الأساسي للمراكز اللحظية لتعيين سرعات النقط المختلفة، وتبعا لهذا التعريف فإن سرعة المركز اللحظي Q_{ij} هي نفسها سرعة النقطة Q_i على الضلع i ، وهي تساوي كذلك سرعة النقطة Q_j على الضلع j (لاحظ أن النقطتين Q_j , Q_i منطبقتان على المركز اللحظي Q_{ij}). والأمثلة التالية توضح هذه الطريقة.

مثال 5–7

في آلية المنـــزلق المنحرف المبينة في شكل 10–7 احسب سرعة النقطتين E , C والسرعة الزاوية ω_3 عندما تكون $\theta_2 = 45^o$ ، علما بأن ذراع الدوران يدور في اتجاه عقرب الساعة بسرعة $\omega_2 = 100$ rev/min. الأبعاد هي:

BD = 200 mm , DE = 250 mm O_2B = 200 mm, BC = 570 mm,

وقيمة الانحراف 145 mm.

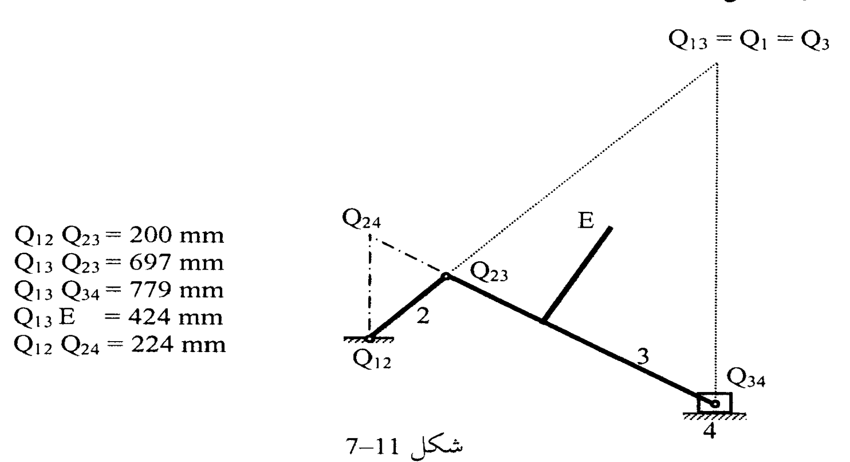


شكل 10–7

الحل:

يتم أولا تعيين المراكز اللحظية للآلية، وعددها ستة، وهي مبينة في شكل 11–7 باستخدام رسم دقيق للآلية. ثم تقاس من الشكل المسافات بين هذه المراكز اللحظية

(أو تحسب باستخدام أساسيات الهندسة المستوية) ، وهذه المسافات المقاسة مبينة علي يسار الشكل.



شكل 11–7

والخطوة التالية هي حساب السرعة الزاوية ω_3 لذراع التوصيل كما يلي. يلاحظ أن سرعة الوصلة B هي $V_B = V_{Q_{23}}$ ، ويمكن حسابها من معرفة السرعة الزاوية ω_2 لذراع الدوران كما في شكل 7–12(a) :

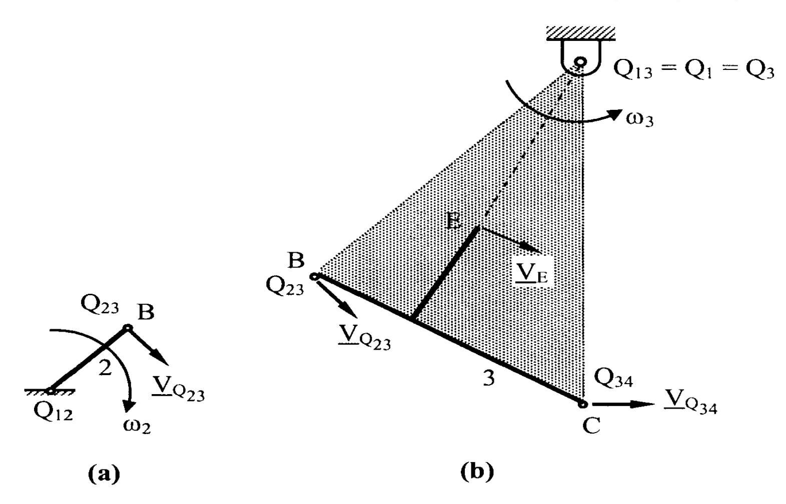
$$\omega_2 = 100\,(2\,\pi\,)/60 = 10.47 \text{ rad/s CW (clockwise)}$$

$$V_B = V_{Q_{23}} = \omega_2\, R_{\,Q_{23}\,Q_{12}} \qquad \text{(a)}$$

$$= (10.47)(200) = 2094 \text{ mm/s}$$

وباستخدام التعريف الأساسي للمراكز اللحظية فإن سرعة المركز اللحظي Q_{13} هي نفسها سرعة النقطة Q_3 على الضلع 3 ، وهي تساوي كذلك سرعة النقطة Q_1 على الضلع 1 (لاحظ أن النقطتين Q_1 , Q_3 منطبقتان على المركز اللحظي Q_{13}). وبما أن الضلع 1 (القاعدة) ثابت ، تكون سرعة النقطة Q_{13} صفرا وهذا معناه أن الضلع 3 في اللحظة المبينة في شكل 11–7 يدور في حركة دائرية حول النقطة Q_{13} . ويمكن تخيل الضلع 3 كأنه لوح مثلث الشكل يدور حـــركة دائرية بحتة (pure rotation) حول محور دوران ثابت عند Q_{13}. وهذه الحركة الدائرية مبينة بصورة

واضحة في شكل 7–12(b) وفيه يظهر الضلع 3 على هيئة المثلث $Q_{13}Q_{23}Q_{34}$ الذي يدور حول محور الدوران Q_{13}.



شكل 7–12

ومن المبادئ الأولية :

$$V_{Q_{23}} = \omega_3 \, R_{Q_{23}\,Q_{13}}$$

ولكن من المعادلة (a) فإن $V_{Q_{23}} = \omega_2 \, R_{Q_{23}\,Q_{12}}$ ومنها:

$$\omega_3 = -\,\omega_2 \, \frac{R_{Q_{12}\;Q_{23}}}{R_{Q_{13}\;Q_{23}}} = -\,(10.47)(200)\,/\,697 = -\,3 \text{ rad/s CCW}$$

(عكس عقرب الساعة).

والإشارة السالبة تنتج من ملاحظة أن Q_{23} تقع بين المركزين Q_{12} و Q_{13} أي أن الضلع 3 يدور عكس عقرب الساعة عندما يدور الضلع 2 مع عقرب الساعة كما هو مبين في شكل 7–12(b).

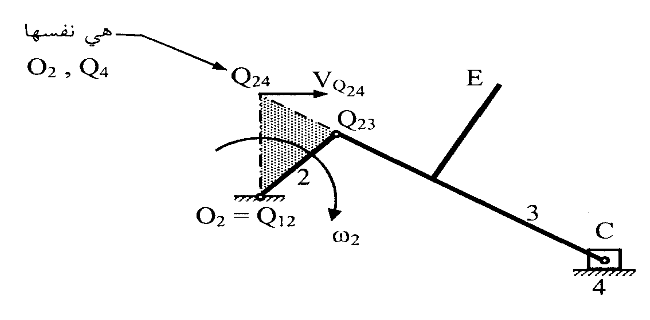
والآن نحسب سرعة C من المبادئ الأولية:

$V_C = V_{Q_{34}} = \omega_3 R_{Q_{34} Q_{13}} = (3)(779) = 2337$ mm/s

وكذلك نحسب سرعة النقطة E بملاحظة أنها جزء من الضلع 3 وأن السرعة اتجاهها عمودي على الذراع $Q_{13}E$:

$V_E = \omega_3 R_{E Q_{13}} = (3)(424) = 1272$ mm/s

وبهذا نحصل على المطلوب. على أننا هنا نقدم حلا بديلا لحساب V_C باستعمال المركز اللحظي Q_{24} ، وسرعته هي نفسها سرعة النقطة Q_4 على الضلع 4 ، وهي تساوي كذلك سرعة النقطة Q_2 على الضلع 2 (لاحظ أن النقطتين Q_2 , Q_4 منطبقتان على المركز اللحظي Q_{24} ، شكل 13–7) . وبما أن الضلع 2 يدور حول محور الدوران الثابت O_2 (هي نفسها Q_{12}) فيمكن تخيل هذا الضلع كأنه لوح مثلث الشكل يدور حركة دائرية حول O_2 كما هو مبين في شكل 13–7 وفيه يظهر الضلع 2 على هيئة المثلث $Q_{12}Q_{24}Q_{23}$ الذي يدور حول محور الدوران Q_{12}.



شكل 13–7

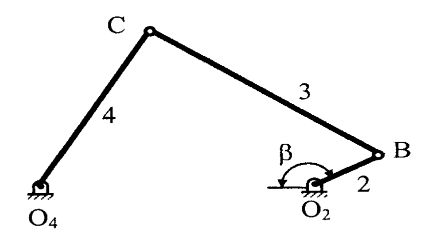
ومن المبادئ الأولية نحصل على نفس النتيجة السابقة:

$V_C = V_{Q_{24}} = \omega_2 R_{Q_{24} Q_{12}} = (10.47)(224) = 2337$ mm/s

مثال 6–7

في آلية الأربعة أضلاع المبينة في شكل 14–7 احسب سرعة النقطة C والسرعات الزاوية ω_4 , ω_3 عندما تكون $\beta = 152^o$ ، علما بأن ذراع الدوران O_2B يدور عكس اتجاه عقرب الساعة بسرعة $\omega_2 = 10$ rad/s. الأبعاد هي:

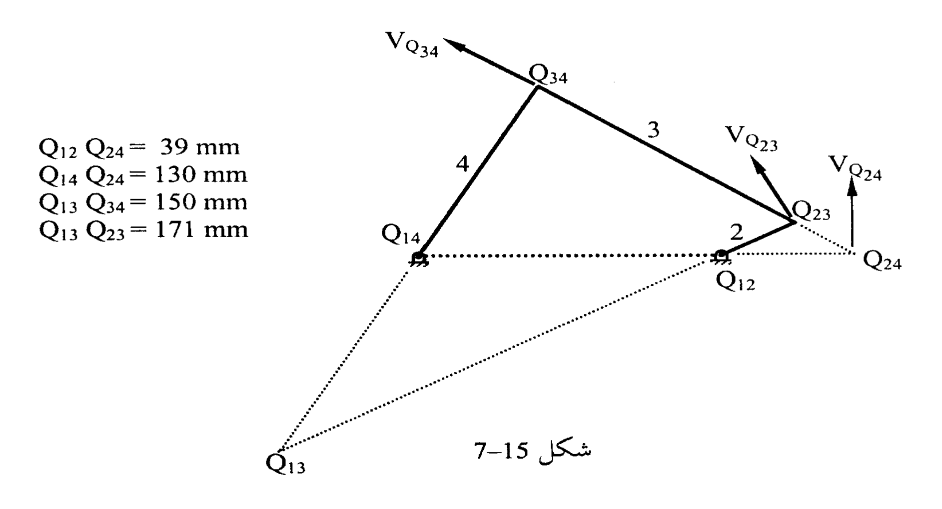
$O_2B = 25$ mm , $BC = 90$ mm, $O_4C = 71$ mm, $O_2O_4 = 90$ mm.



شكل 14–7

الحل:

يتم أولا تعيين المراكز اللحظية للآلية ، وعددهـــا ستة ، وهي مبينة في شكـــل 15–7 ثم تقاس من الشكل المسافات بين هذه المراكز اللحظية باستخدام رسم دقيق للآلية (أو تحسب باستخدام أساسيات الهندسة المستوية) ، وهذه المسافات المقاسة مبينة علي يسار الشكل.



شكل 15–7

والخطوة التالية هي حساب السرعة الزاوية ω_3 لذراع التوصيل BC كما يلي. يلاحظ أن سرعة الوصلة B هي $V_B = V_{Q_{23}}$ ، وهي عمودية على الذراع BO_2 و يمكن حسابها من معرفة السرعة الزاوية ω_2 لذراع الدوران 2:

$$V_B = V_{Q_{23}} = \omega_2 R_{BO_2} = \omega_2 R_{Q_{23}Q_{12}} \quad \text{(b)}$$

$$= (10)(25) = 250 \text{ mm/s}$$

والآن بملاحظة أن سرعة المركز اللحظي Q_{13} تساوي صفرًا وهذا معناه أن الضلع 3 في اللحظة المبينة في شكل 15–7 يدور في حركة دائرية حول النقطة Q_{13} فيمكن تخيل الضلع 3 كأنه لوح على هيئة المثلث $Q_{13}Q_{23}Q_{34}$ الذي يدور حول محور الدوران Q_{13}.

ومن المبادئ الأولية :

$$V_{Q_{23}} = \omega_3 R_{Q_{23}Q_{13}}$$

ولكن من المعادلة (b) فإن $V_{Q_{23}} = \omega_2 R_{Q_{23}Q_{12}}$ ومنها:

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{R_{Q_{12}Q_{23}}}{R_{Q_{13}Q_{23}}} = (10)(25) / 171 = 1.462 \quad \text{rad/s}$$

واتجاه ω_3 هو نفس اتجاه ω_2 ، أي عكس عقرب الساعة. والخطوة التالية هي حساب السرعة الزاوية ω_4 للذراع O_4C كما يلي. يلاحظ أن سرعة الوصلة C هي $V_C = V_{Q_{34}}$ ، وهي عمودية على الذراع O_4C . ولأن النقطة Q_{34} جزء من الضلع 3 الذي يدور كأنه لوح على هيئة المثلث $Q_{13}Q_{23}Q_{34}$ حول محور الدوران Q_{13} فيمكن حساب $V_{Q_{34}}$ من معرفة السرعة الزاوية ω_3:

$$V_{Q_{34}} = \omega_3 R_{Q_{34}Q_{13}} \quad \text{(c)}$$

$$= (1.462)(150) = 219.3 \text{ mm/s}$$

وبملاحظة أن الوصلة C هي جزء من الذراع O_4C الذي يدور حول محور الدوران Q_{14} فتكون سرعة C هي $V_C = V_{Q_{34}}$

$$V_C = V_{Q_{34}} = \omega_4 R_{Q_{34}Q_{14}}$$

أي أن:

$\omega_4 = V_{Q_{34}} \,/\, R_{Q_{34}Q_{14}} = 219.3/\,71 = 3.09$ rad/s

واتجاه ω_4 هو نفس اتجاه ω_3 ، أي عكس عقرب الساعة.

ويمكن أيضا كحل بديل حساب ω_4 باستعمال المركز اللحظي Q_{24} كما يلي. نلاحظ أن الضلع 2 في اللحظة المبينة في شكل 7–15 يدور في حركة دائرية حول النقطة Q_{12} فيمكن تخيل الضلع 2 كأنه لوح على هيئة المثلث $Q_{12}Q_{23}Q_{24}$ الذي يدور حول محور الدوران Q_{12} فتكون

$$V_{Q_{24}} = \omega_2 R_{Q_{24}Q_{12}}$$
$$= (10)(40) = 400 \text{ mm/s}$$

ولأن النقطة Q_{24} هي أيضا جزء من الضلع 4 الذي يدور كأنه لوح على هيئة المثلث $Q_{14}Q_{24}Q_{34}$ حول محور الدوران Q_{14} فيمكن حساب السرعة الزاوية ω_4 من معرفة $V_{Q_{24}}$:

$\omega_4 = V_{Q_{24}} \,/\, R_{Q_{24}Q_{14}} = 400 \,/\, 130 = 3.08$ rad/s

واتجاه ω_4 هو نفس اتجاه ω_2 ، أي عكس عقرب الساعة ، وذلك لأن المركز اللحظي Q_{24} يقع خارج المسافة بين المركزين Q_{12} و Q_{14}.

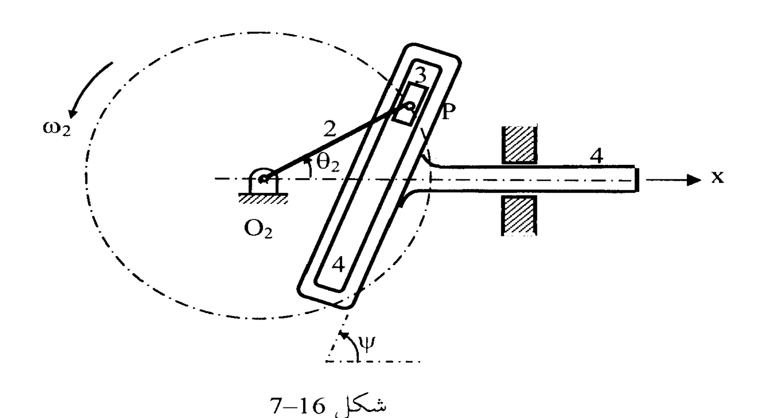
مثال 7–7

يوضح شكل 7–16 آلية الحركة التوافقية المعدلة Modified Scotch Yoke Mechanism حيث يدور الذراع 2 فتنـــزلق نقطة P في مجرى في الجزء 4 الذي يتحرك حركة أفقية ترددية. والمطلوب استخدام طريقة المراكز اللحظية لإيجاد السرعة الأفقية للضلع 4. السرعة الدورانية للضلع 2 هي10 rad/s عكس عقرب الساعة وطول هذا الضلع $O_2P = 10$ cm ، والزاوية $\psi = 70^o$ ، والزاوية $\theta_2 = 30^o$.

الحل:

عدد المراكز اللحظية لهذه الآلية ستة، والمراكز الأولية منها مبينة في شكل 7–17 (أي Q_{12} , Q_{23} , Q_{14} , Q_{34}). والمركز اللحظي Q_{14} يقع رأسيا (عموديا على اتجاه حركة المنـــزلق 4) في ∞ ، أما المركز اللحظي Q_{34} فيقع في ∞ على زاوية 20^o (عموديا على اتجاه حركة المنـــزلق 3). وتظهر هذه المراكز الأربعة كأربعة أوتار في

الدائرة المبينة على يسار الشكل والتي وضعت أرقام الأضلاع على محيطها. أما المركز اللحظي Q_{24} فيتم تعيينه باستعمال نظرية كنيدي وبمساعدة الدائرة حيث يمثل الخط المتقطع 24 (في الدائرة) هذا المركز اللحظي ، ولأن هذا الخط يكون مثلثا مع الخطين 12 , 14 يكون المركز Q_{24} على خط مستقيم مع المركزين Q_{12} , Q_{14} ، وفي نفس الوقت يكون الخط المتقطع 24 مثلثا مع الخطين 34 , 23 مما يعني أن المركز Q_{24} على خط مستقيم أيضا مع المركزين Q_{34} , Q_{23} ، وبذلك يتم تعيين المركز اللحظي Q_{24} من تقاطع الخط $Q_{12}\,Q_{14}$ مع الخط $Q_{23}\,Q_{34}$ كما هو مبين بالشكل. ثم تقاس من الشكل المسافة $Q_{12}\,Q_{24}$ باستخدام رسم دقيق للآلية (أو تحسب باستخدام أساسيات الهندسة المستوية) ، وهذه المسافة المقاسة هي $Q_{12}\,Q_{24} = 8.2$ cm.

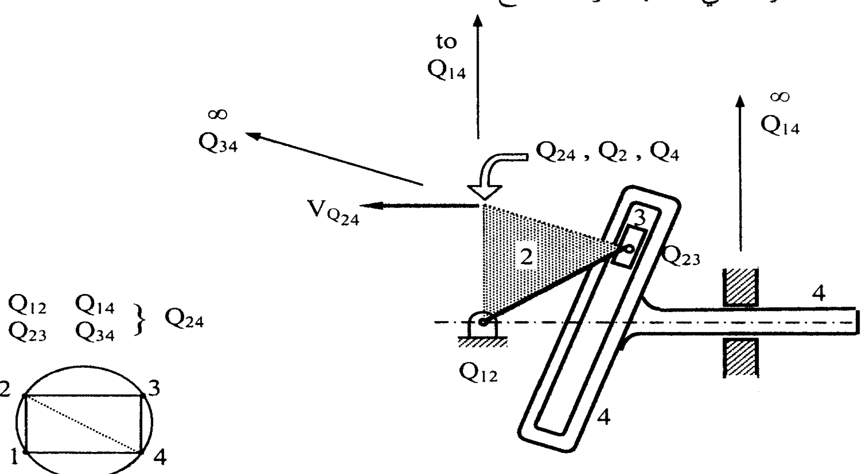


شكل 7–16

يمكن حساب سرعة الضلع 4 باستعمال المركز اللحظي Q_{24} كما يلي. نلاحظ أن الضلع 2 في اللحظة المبينة في شكل 7–17 يدور في حركة دائرية حول النقطة Q_{12} فيمكن تخيل الضلع 2 كأنه لوح على هيئة المثلث $Q_{12}Q_{23}Q_{24}$ الذي يدور حول محور الدوران Q_{12} فتكون:

$$V_{Q_{24}} = \omega_2\, R_{Q_{24}\,Q_{12}}$$
$$= (10)(8.2) = 82 \text{ cm/s}$$

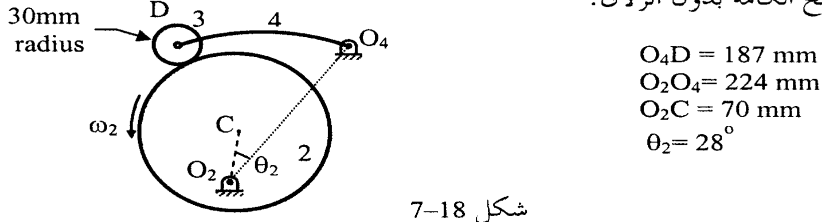
ولأن النقطة Q_{24} منطبقة على النقطة Q_4 التي هي جزء من الضلع 4 تكون هذه السرعة هي نفسها سرعة الضلع 4 .



شكل 17-7

مثال 8-7

شكل 18-7 يوضح الكامة الدائرية 2 التي نصف قطرها 100 mm والتابع المقوس 4 ذو العجلة roller follower . إذا كانت الكامة تدور بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 10$ rad/s ، احسب السرعة الزاوية للضلع 4 وللعجلة 3 التي تتدحرج على سطح الكامة بدون انزلاق.



شكل 18-7

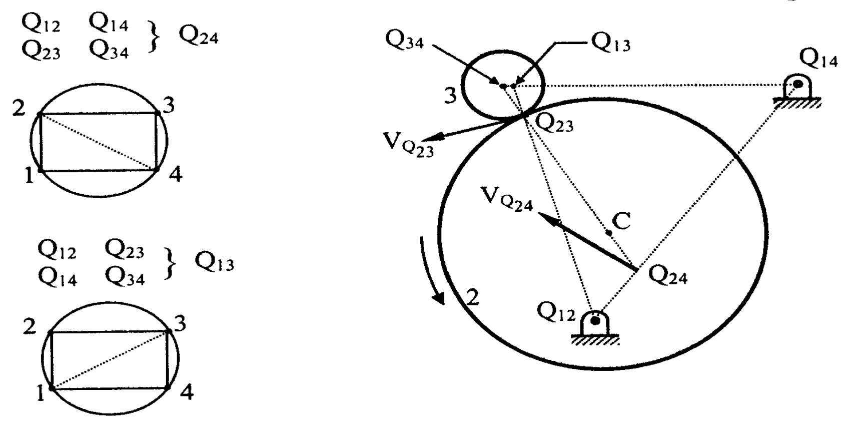
الحل:

تتدحرج العجلة 3 على سطح الكامة بدون انزلاق ولذلك يكون المركز اللحظي

Q_{23} هو نقطة التلامس بين الكامة والعجلة. والعـــدد الكلي للمراكز اللحظية لهذه الآلية ستة والمراكز الأولية منها (Q_{12} , Q_{23} , Q_{14} , Q_{34}) مبينة في شكل 19–7 ، وتظهر هذه المراكز الأربعة كأربعة أوتار في الدائرة المبينة أعلى يسار الشكل والتي وضعت أرقام الأضلاع على محيطها. أما المركز اللحظي Q_{24} فيتم تعيينه باستعمال نظرية كنيدي من تقاطع الخط $Q_{12}\,Q_{14}$ مع الخط $Q_{23}\,Q_{34}$ كما هو مبين بالشكل. وكذلك المركز اللحظي Q_{13} يتم تعيينه من تقاطع الخط $Q_{12}\,Q_{23}$ مع الخط $Q_{14}\,Q_{34}$. ثم تقاس من الشكل المسافات بين المراكز اللحظية باستخدام رسم دقيق للآلية (أو تحسب باستخدام أساسيات الهندسة المستوية) ، وهذه المسافات المقاسة هي:

$Q_{12}\,Q_{24} = 47$ mm, $Q_{14}\,Q_{24} = 177$ mm, $Q_{12}\,Q_{23} = 161$ mm, $Q_{13}\,Q_{14} = 179$ mm,
$Q_{13}\,Q_{12} = 188$ mm, $Q_{13}\,Q_{23} = 27$ mm, $Q_{13}\,Q_{34} = 8$ mm.

وتجدر الإشارة هنا إلى أن التقوس في الذراع 4 ليس له أي تأثير على مواضع المراكز اللحظية لأن العبرة هي في كون المسافة DO_4 ثابتة ولا تتغير أثناء الحركة لأن الذراع 4 جامد (rigid) .



شكل 19–7

والخطوة التالية هي حساب السرعة الزاوية ω_4 كما يلي. يلاحظ أن سرعة النقطة Q_{24} هي $V_{Q_{24}}$ ، وهي عمودية على الخط $Q_{12}\,Q_{14}$ ويمكن حسابها من معرفة

السرعة الزاوية ω_2 للكامة كما في شكل 19–7 :

$$V_{Q_{24}} = \omega_2 R_{Q_{24} Q_{12}}$$
$$= (10)(47) = 470 \text{ mm/s}$$

ولأن النقطة Q_{24} جزء من الضلع 4 الذي يدور كأنه لوح على هيئة المثلث $Q_{14}Q_{24}Q_{34}$ حول محور الدوران Q_{14} ، لذلك يمكن حساب ω_4 من معرفة السرعة $V_{Q_{24}}$:

$$\omega_4 = - V_{Q_{24}} / R_{Q_{24} Q_{14}} = - 470 / 177 = - 2.66 \text{ rad/s}$$

والإشارة السالبة تنتج من ملاحظة أن Q_{24} تقع بين المركزين Q_{12} و Q_{14} أي أن الضلع 4 يدور مع عقرب الساعة عندما يدور الضلع 2 عكس عقرب الساعة.

ولحساب السرعة الزاوية ω_3 يلاحظ أن سرعة النقطة Q_{23} هي $V_{Q_{23}}$ ، وهي عمودية على الخط $Q_{12}\,Q_{23}$ ويمكن حسابها من معرفة السرعة الزاوية ω_2 للكامة كما في شكل 19–7 :

$$V_{Q_{23}} = \omega_2 R_{Q_{23} Q_{12}}$$
$$= (10)(161) = 1610 \text{ mm/s}$$

والآن بملاحظة أن سرعة المركز اللحظي Q_{13} تساوي صفرًا وهذا معناه أن العجلة الدائرية 3 في اللحظة المبينة في شكل 19–7 تدور في حركة دائرية حول النقطة Q_{13} ، ومنها:

$$\omega_3 = - V_{Q_{23}} / R_{Q_{23} Q_{13}} = - 1610 / 27 = - 59.6 \text{ rad/s}$$

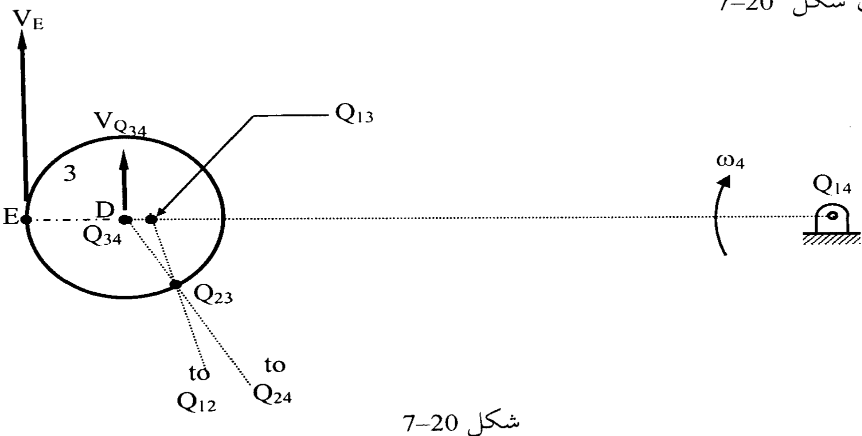
والإشارة السالبة تنتج من ملاحظة أن Q_{23} تقع بين المركزين Q_{12} و Q_{13} أي أن الضلع 3 يدور مع عقرب الساعة عندما يدور الضلع 2 عكس عقرب الساعة.

مثال 9–7

في آلية الكامة الدائرية المذكورة في المثال السابق ، استخدم المركز اللحظي Q_{34} لإيجاد ω_3 من معرفة ω_4 وقارن مع النتيجة السابقة. حدد أيضا أسرع نقطة على العجلة 3 واحسب مقدار سرعتها.

الحل:

من شكل 19–7 نتذكر أن $Q_{13}\,Q_{34} = 8$ mm ومن معطيـــات المسألة أن $Q_{14}\,Q_{34} = 187$ mm . وقد أعيد رسم جزء من الآلية بمقياس رسم أكبر في شكل 20–7 للتوضيح. ومن معرفة ω_4 يمكن حساب سرعة النقطة D أي V_D (وهي نفسها المركز اللحظي Q_{34}) وتكون عمودية على الخط $Q_{14}\,Q_{34}$ كما هو موضح في شكل 20–7



شكل 20–7

$$V_D = V_{Q_{34}} = \omega_4 \, R_{Q_{34}Q_{14}}$$
$$= (2.66)(187) = 497.42 \text{ mm/s}$$

والآن بملاحظة أن سرعة المركز اللحظي Q_{13} تساوي صفرًا وهذا معناه أن العجلة 3 في اللحظة المبينة في شكل 20–7 تدور في حركة دائرية حول النقطة Q_{13} فيمكن حساب ω_3 من العلاقة:

$$\omega_3 = V_{Q_{34}} \;/\; R_{Q_{34}Q_{13}}$$
$$= 497.42 / 8 = 62.18 \text{ rad/s}$$

وهذه النتيجة تقارب القيمة $\omega_3 = 59.6$ rad/s المحسوبة في المثال السابق. وسبب الاختلاف بين القيمتين هو الخطأ في قياس المسافات بين المراكز اللحظية من رسم الآلية بمقياس رسم 1:1 حيث تبلغ دقة القياس من مثل هذا الرسم حوالي 1.0 mm . ويلاحظ أن الخطأ يكون نسبيا كبيرا في المسافات الصغيرة مثل المسافة $Q_{13}\,Q_{34}$.

ولإعطاء القارئ مثالا علي تأثير دقة القياس على النتائج فقد تم حساب المسافات بين المراكز اللحظية باستخدام قواعد الهندسة المستوية ولكن حذفت التفاصيل للاختصار ، وكانت النتائج هي:

$Q_{12}Q_{24} = 47.2$ mm, $Q_{14}Q_{24} = 176.8$ mm, $Q_{12}Q_{23} = 161.02$ mm,
$Q_{13}Q_{14} = 178.69$ mm, $Q_{13}Q_{12} = 187.81$ mm, $Q_{13}Q_{23} = 26.8$ mm, $Q_{13}Q_{34} = 8.31$ mm.

وباستعمال هذه القيم لحساب السرعات الزاوية نحصل على $\omega_3 = 60.09$ rad/s , $\omega_4 = 2.67$ rad/s ومنها نرى أن استخدام المركز اللحظي Q_{23} لإيجاد ω_3 أفضل من استخدام المركز اللحظي Q_{34} لأن الأخير يعتمد على المسافة الصغيرة $Q_{13}Q_{34}$ والتي يكون الخطأ فيها من القياس كبيرا نسبة إلى قيمتها الصغيرة.

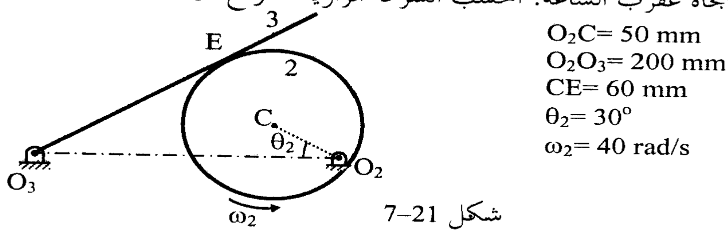
ومن شكل 7–20 وباستخدام المركز اللحظي Q_{13} نلاحظ أن أسرع نقطة على العجلة 3 هي أبعدها عن هذا المركز اللحظي وهي النقطة E والتي يمكن حساب سرعتها من المبادئ الأولية ومعرفة أن نصف قطر العجلة 3 يساوي 15 mm:

$$V_E = \omega_3 R_{EQ_{13}}$$
$$= (60.09)(8.31+15) = 1400 \text{ mm/s}$$

واتجاهها لأعلى كما هو موضح في شكل 7–20 .

مثال 7–10

تدور الكامة 2 المبينة في شكل 7–21 بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 40$ rad/s عكس اتجاه عقرب الساعة. احسب السرعة الزاوية للذراع 3.



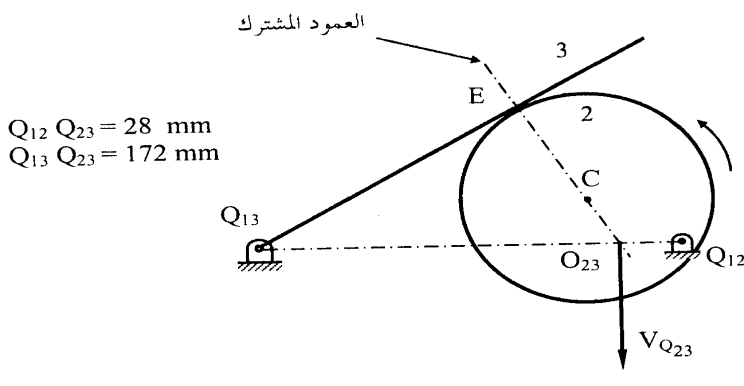
شكل 7–21

الحل:

يتم أولا تعيين المراكز اللحظية للآلية، وعددها ثلاثة، وهي مبينة في شكل 7–22

ثم تقاس من الشكل المسافات بين هذه المراكز اللحظية باستخدام رسم دقيق للآلية (أو تحسب باستخدام أساسيات الهندسة المستوية) ، وهذه المسافات المقاسة مبينة على يسار الشكل.

يلاحظ أن سرعة النقطة Q_{23} هي $V_{Q_{23}}$ ، وهي عمودية على الخط $Q_{12}\ Q_{13}$ ويمكن حسابها من معرفة السرعة الزاوية ω_2 للكامة كما في شكل 22–7 :



شكل 22–7

$$V_{Q_{23}} = \omega_2 R_{Q_{23} Q_{12}}$$
$$= (40)(28) = 1120 \text{ mm/s}$$

ولأن النقطة Q_{23} هي أيضا جزء من الضلع 3 الذي يدور كأنه لوح على هيئة المثلث $Q_{13}Q_{23}E$ حول محور الدوران Q_{13} ، لذلك يمكن حساب ω_3 من معرفة السرعة $V_{Q_{23}}$:

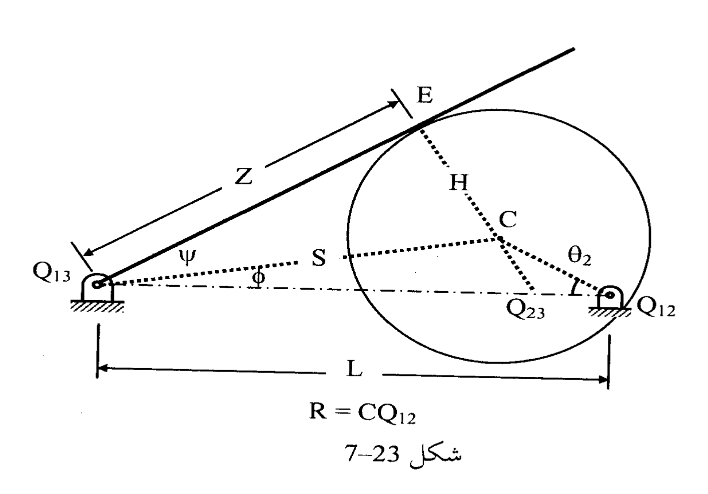
$$\omega_3 = - V_{Q_{23}} / R_{Q_{23} Q_{13}} = - 1120 / 172 = - 6.51 \text{ rad/s}$$

والإشارة السالبة تنتج من ملاحظة أن Q_{23} تقع بين المركزين Q_{12} و Q_{13} أي أن الضلع 3 يدور مع عقرب الساعة عندما تدور الكامة 2 عكس عقرب الساعة.

مثال 11–7

استخدم مبادئ الهندسة المستوية وطريقة مراكز السرعة اللحظية لتحليل آلية الكامة المبينة في شكل 21–7 وارسم شكلا بيانيا يوضح تغير السرعة الزاوية للذراع

3 عندما تدور الكامة 2 دورة كاملة بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 40$ rad/s في اتجاه عقرب الساعة.



$R = CQ_{12}$

شكل 23-7

الحل:

الهدف من هذا المثال التأكيد على أنه لا يلزم استعمال الطريقة البيانية لقياس المسافات بين المراكز اللحظية ، وإنما يمكن استنتاج علاقات تصلح لأي موضع للآلية وكذلك دراسة تغير ω_3 أثناء دوران الكامة. وشكل 23-7 يوضح الأبعاد اللازمة للحل ومنها يمكن استنتاج المعادلات التالية. وللتوضيح فإنه سيتم التعويض في كل معادلة منهم في حالة $\theta_2 = 20^o$.

من المثلث $C\,Q_{12}\,Q_{13}$ وباستعمال cosine rule :

$$S^2 = R^2 + L^2 - 2\,R\,L\cos\theta_2$$

$$= 50^2 + 200^2 - 2\,(5)(200)\ \cos 20 = 23\,706.15\ mm^2\ ;\ S = 153.97\ mm$$

ومن نفس المثلث وباستعمال sine rule :

$$\phi = \sin^{-1}\{(R\sin\theta_2)/S\}$$

$$= \sin^{-1}\{(50\sin 20)/153.97\} = \sin^{-1}(0.111) = 6.38^o$$

ومن المثلث $C\,E\,Q_{13}$ وملاحظة أن الزاوية $\{C\,E\,Q_{13} = 90^o\}$:

$$\psi = \sin^{-1}(H\ /\ S)$$

$= \sin^{-1} (60 \ / \ 153.97) = \sin^{-1} (0.397) \ = 22.935^o$

وباستعمال نظرية فيثاغورث

$Z^2 = S^2 - H^2$

$= \ 153.97^2 - 60^2 = 20\ 106.15 \ \ mm^2 \ \ ; Z = 141.796 \ mm$

ومن المثلث $E\ Q_{13}\ Q_{23}$:

$R_{Q_{13}\,Q_{23}} = Z / \cos (\psi + \phi)$

$= 141.796 / \cos (22.935 + 6.38) = 162.62 \ mm$

$R_{Q_{12}\,Q_{23}} = L - R_{Q_{13}\,Q_{23}}$

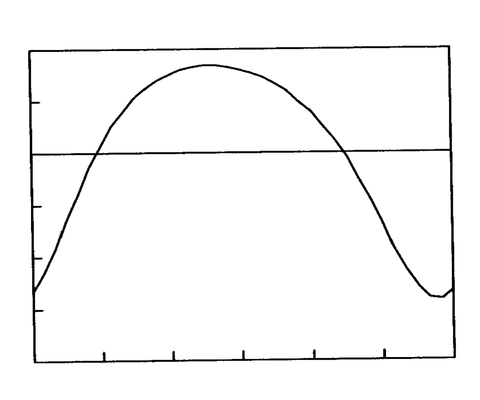
$= 200 - 162.62 = 37.38 \ mm$

$$\omega_3 = - \omega_2 \frac{R_{Q_{12}\ Q_{23}}}{R_{Q_{13}\ Q_{23}}}$$

$= - (40)(37.38 /' \ 162.62) = - 9.196 \ rad/s$

والإشارة السالبة في النتيجة تعني أن سرعة دوران التابع (follower 's angular velocity) ω_3 تكون عكس اتجاه دوران الكامة (cam ' s rotation) ، مما يعني أن ω_3 هي عكس اتجاه عقرب الساعة.

θ_2	ω_3
0	– 13.333
30	– 6.542
60	0.685
90	5.216
120	7.505
150	8.309
180	8.000
210	6.616
240	3.924
270	– 0.510
300	– 6.839
330	–13.030
360	–13.333



شكل 24–7

وبالتعويض في المعادلات السابقة عن قيم $\{\theta_2 = \ 0,10,20,...,360\}$ يمكن

الحصول على المنحنى المبين في شكل 7–24 وفي الشكل نفسه جدول يبين قيم ω_3 المحسوبة كل 30^o . ويلاحظ من المنحنى أن السرعة ω_3 تكون سالبة ، أي تكون عكس اتجاه سرعة الكامة ω_2 ، في مدى الدوران $0^o \leq \theta_2 < 56.63^o$ ، وتكون صفرا عندما تكون $\theta_2 = 56.63^o$ (وهذا هو موضع السكون الأقصى). ومع زيادة الزاوية تستمر السرعة في الزيادة الموجبة (أي في اتجاه دوران الكامة) حتى تصل إلى أقصى قيمة ثم تأخذ في التناقص حتى تصل إلى الصفر مرة أخرى عندما تكون الزاوية θ_2 قيمتها هي $\theta_2 = 267.14^o$ (وهذا هو موضع السكون الأدنى). ومع استمرار دوران الكامة تزداد ω_3 بقيمة سالبة (أي عكس اتجاه دوران الكامة) حتى تصل إلى أقصى قيمة ثم تأخذ في التناقص حتى تصل إلى الصفر عندما تكون $\theta_2 = 56.63^o$ مرة أخرى.

خاتمة الفصل السابع

عرض هذا الفصل أنواع المراكز اللحظية للسرعة، فمنها المراكز الأولية ومنها ما يمكن الحصول عليه باستخدام نظرية كنيدي. ثم تطرق الموضوع إلى استخدام هذه المراكز اللحظية في تحليل السرعة حيث وضحت الأمثلة المحلولة أن التعريف الأساسي لهذه المراكز اللحظية يجعل من الممكن حساب سرعات الوصلات والنقاط المختلفة في الآلية بسهولة نسبية. واعتمدت معظم الأمثلة المحلولة الطريقة البيانية حيث تقاس المسافات بين المراكز اللحظية من رسم دقيق للآلية، على أن مثال 7–9 وضح أن قياس المسافات من الرسم قد يؤدي إلى خطأ كبير نسبيا إذا كانت المسافات بين المراكز صغيرة. وقد وضح المثال الأخير في الفصل أنه يمكن حساب المسافات بين المراكز اللحظية باستخدام مبادئ الهندسة المستوية وفي هذه الحالة يتحقق غرضان في وقت واحد ، أولهما الحصول على قيم دقيقة للسرعات وثانيهما أن العلاقات المستنتجة تصلح لتحليل سرعة الآلية في أوضاع مختلفة وليس في وضع واحد فقط كما هو الحال في الطرق البيانية التي تعتمد على رسم الآلية في وضع معين وقياس المسافات في هذا الوضع فقط.

الفصل الثامن
تحليل السرعة بطريقة السرعة النسبية
Velocity Analysis Using Relative Velocity

تعرفنا في الفصل السابق على طريقة تحليل السرعة في الآليات باستعمال المراكز اللحظية وهي أول طريقة بيانية وتحليلية يناقشها هذا الكتاب. وفي هذا الفصل نناقش طريقة أخرى تعتمد على إيجاد السرعة النسبية بين الوصلات في الآلية ثم حل المعادلات الاتجاهية الناتجة. وكثير من المراجع تستخدم حلا بيانيا (بالرسم) لهذه المعادلات ولكن الحل بالرسم ليس حتميا بل يمكن حل المعادلات تحليليا ولكن هذا يستدعي استخداما مكثفا لمبادئ الهندسة المستوية أو جبر المتجهات. وفي الكثير من المراجع تكون هذه الطريقة من أوائل الطرق التي تطرح مع بيان كيفية تحليل الآليات بيانيا ، إلا أن انتشار الكمبيوتر يجعل الطرق التحليلية والعددية الأخرى أكثر جاذبية لأنها تعطي دقة أعلى وكذلك لأن المعادلات أو برامج الكمبيوتر عادة ما تعطي تحليلا للحركة في كل مواضع الآلية بينما يقتصر الحل البياني على موضع واحد للآلية. إلا أن الطرق البيانية لها ميزة الإدراك الأعمق للآلية وحركة أضلاعها بالنسبة لبعضها. وفيما يلي نناقش طريقة السرعة النسبية بمثال مبسط أولا ثم نطبق الطريقة على أمثلة عديدة.

8.1 السرعة النسبية بين نقطتين على ضلع جامد

مثال 8-1

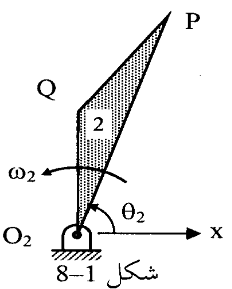
الذراع المثلث المبين في شكل 1–8 أبعاده 18.79 cm , 10 , 10 ويدور بسرعة زاوية $\omega_2 = 8$ rad/s. ارسم مضلع السرعة علما بأن $\theta_2 = 70°$.

الحل:

يدور هذا الضلع المتماسك rigid body كوحدة واحدة حول المحور الثابت O_2 ولذلك تكون سرعة أي نقطة عليه مثل النقطة Q هي:

$\underline{V}_Q = \underline{\omega}_2 \times \underline{R}_{QO_2}$

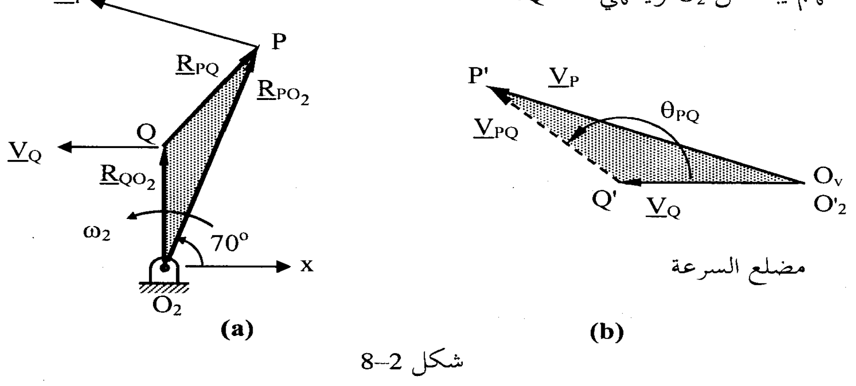
واتجاه هذه السرعة عمودي على $\underline{R}_{QO_2}$ كما هو مبين في شكل (a) 2–8 ، أما مقدارها فهو:



شكل 8-1

$V_Q = \omega_2 R_{QO_2} = (8)(10) = 80$ cm/s

ولأن المتجه $\underline{\omega}_2$ يجعل المتجه $\underline{R}_{QO_2}$ يميل للدوران عكس عقرب الساعة ، فإن النقطة Q تميل للحركة ناحية اليسار ، ولذلك فإن السهم الذي يمثل متجه السرعة $\underline{V}_Q$ يكون عموديا على $\underline{R}_{QO_2}$ واتجاه هذا السهم ناحية اليسار. لاحظ أن $\underline{\omega}_2$ هي متجه عمودي على مستوى الورقة ويتجه ناحية القارئ ولذلك يدير الجسم عكس عقرب الساعة. لاحظ أيضا ترتيب الرموز السفلية **subscripts** في المتجه $\underline{R}_{QO_2}$ والذي يمثله سهم يبدأ من O_2 وينتهي عند Q.



شكل 8-2

وبالمثل تكون سرعة النقطة P عمودية على $\underline{R}_{PO_2}$ ومقدارها هو:

$V_P = \omega_2 R_{PO_2} = (8)(18.79) = 150.32$ cm/s

والسرعة النسبية بين Q , P هي فرق السرعتين (باستعمال المتجهات وليس مجرد الفرق بين المقدارين) ويرمز لها بالرمز $\underline{V}_{PQ}$ حيث:

$$\overset{\circ\circ}{\underline{V}}_{PQ} = \overset{\surd\surd}{\underline{V}}_{P} - \overset{\surd\surd}{\underline{V}}_{Q} \quad (8-1)$$

وكل متجه في هذه المعادلة له مقدار واتجاه ، ومن المفيد عند كتابة مثل هذه المعادلة الاتجاهية تحديد الكميات المعلومة لكل متجه. ولذلك استعملنا هنا فوق كل متجه الرمز(√) للدلالة على كمية معلومة ، والرمز (0) للدلالة على كمية مجهولة علما بأن الكمية الأولى من اليسار هي مقدار المتجه magnitude والثانية هي الاتجاه direction. وعلى ذلك تدل المعادلة (1–8) على أن المتجه $\underline{V}_{PQ}$ مجهول مقدارا واتجاها. ويمكن حل المعادلة (1–8) تحليليا ولكن جرت عادة الكثير من كتب نظرية الماكينات على حلها بيانيا برسم مضلع السرعة. وخطوات رسم مضلع السرعة المبين في شكل (b) 2–8 هي:

* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 150.32 (بمقياس رسم مناسب) موازيا للسرعة $\underline{V}_P$ وبذلك نكون قد عينا النقطة 'P ، ومن نقطة الأصل أيضا نرسم سهما طوله 80 (بنفس مقياس الرسم) موازيا للسرعة $\underline{V}_Q$ ، وبذلك نكون قد عينا النقطة 'Q . لاحظ أن الوصلة O_2 سرعتها صفر ولذلك يكون موضع O'_2 منطبقا على O_v .

* نرسم سهما من 'Q إلى 'P وهو يمثل المتجه $\underline{V}_{PQ}$ مقدارا واتجاها ، ونقيس من الرسم المقدار (وهو يساوي الطول مضروبا في مقياس الرسم) والاتجاه (وهو الزاوية θ_{PQ} مقاسة عند قاعدة المتجه مع الأفقي) فنجد أن:

$$V_{PQ} = 80 \text{ cm/s}$$
$$\theta_{PQ} = 160^{o}$$

ونجد من مضلع السرعة أيضا أن $\underline{V}_{PQ}$ عمودي على متجه الموضع $\underline{R}_{PQ}$. وذلك معناه أنه في حالة هذا الضلع الجامد فإن كل متجه في مضلع السرعة يكون عموديا على متجه الموضع المناظر له ، أي أن O'_2P' عمودي على O_2P ، و O'_2Q' عمودي على O_2Q ، وكذلك $Q'P'$ عمودي على QP . وبسبب هذه الحقيقة نرى أن المثلث $O'_2Q'P'$ هو صورة للضلع الأصلي O_2QP وهي تسمى صورة السرعة للضلع velocity image أو صورة الجسم في مضلع السرعة ، وهذه الخاصية مفيدة في كثير من التطبيقات العملية. وأهم خصائص صورة الجسم في مضلع السرعة هي:

*كل خط في مضلع السرعة عمودي على الخط المناظر له في الآلية الأصلية ، ومثال ذلك أن $Q'P'$ عمودي على QP أي أن صورة الجسم ككل تكون على زاوية

90^o مع الجسم الأصلي.

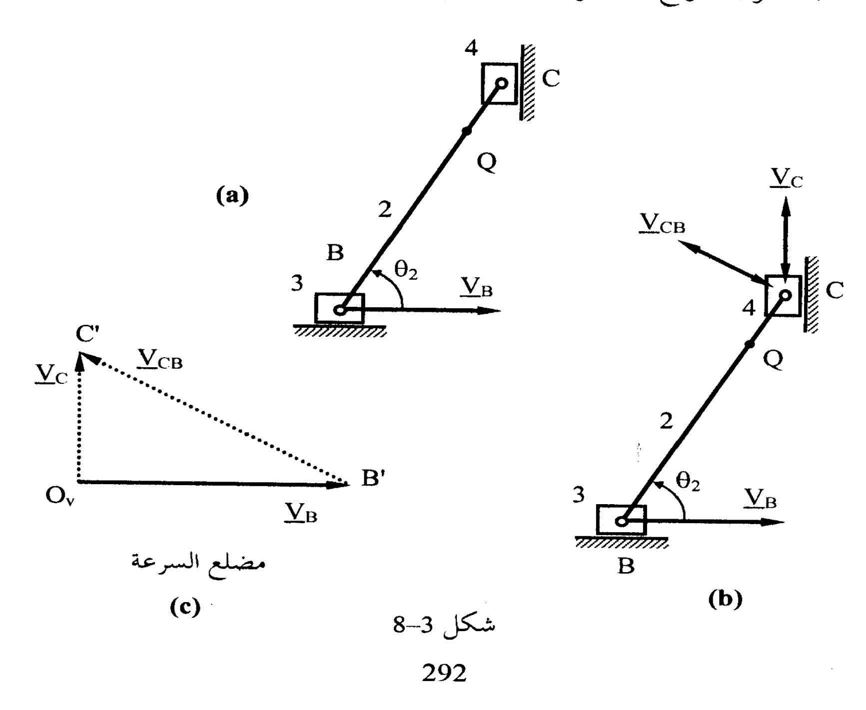
*صورة الجسم في مضلع السرعة تكون عمودية على الجسم الأصلي في اتجاه السرعة الزاوية للجسم (ω_2) ، أي عكس عقرب الساعة في المثال الحالي.

* الصورة متشابهة هندسيا مع الأصل أي أن الزوايا في كل من الأصل والصورة متساوية ، والأضلاع متناسبة بمعنى أن:

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{O'_2 P'}{O_2 P} = \frac{O'_2 Q'}{O_2 Q}$$

مثال 2–8

في الآلية المبينة في شكل (a)3–8 يتحرك المنـــزلق 3 إلى اليمين بسرعة منتظمة $V_B = 400$ mm/s احسب سرعة النقطة C مقدارا واتجاها عندما تكون $\theta_2 = 60^o$. احسب أيضا السرعة الزاوية للذراع BC وكذلك سرعة النقطة Q مقدارا واتجاها علما بأن طول الذراع BC هو 200 mm وأن المسافة BQ طولها 160 mm .



شكل 3–8

الحل: الوصلة B معلومة السرعة مقدارا واتجاها وتقع هي والوصلة C على نفس الجسم الجامد ولذلك ننسب سرعة النقطة C إليها:

$$\overset{0\,\surd}{\underline{V}_{CB}} = \overset{0\,\surd}{\underline{V}_{C}} - \overset{\surd\,\surd}{\underline{V}_{B}}$$

وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{V}_C$ ومقدار $\underline{V}_{CB}$ وذلك لأن اتجاه $\underline{V}_C$ رأسي ويظهر في شكل 8–3(b) على هيئة سهم له اتجاهان لأنه في هذه المرحلة ليس معروفا ما إذا كانت $\underline{V}_C$ لأعلى أم لأسفل ، وتكون $\underline{V}_{CB}$ عمودية على BC وتظهر في شكل 8–3(b) على هيئة سهم له اتجاهان لأن اتجاه $\underline{V}_{CB}$ في هذه المرحلة ليس معروفا ما إذا كان لليمين أم لليسار. ولحل المعادلة نرسم مضلع السرعة المبين في شكل 8–3(c) :

* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 400 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_B$ وبذلك نكون قد عينا النقطة 'B ، ومن نقطة الأصل أيضا نرسم خطا رأسيا موازيا للسرعة $\underline{V}_C$ (يظهر في الشكل متقطعا لأنه مجهول الطول) ، والنقطة 'C تقع في مكان ما على هذا الخط .

* من 'B نرسم خطا متقطعا عموديا على BC (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{CB}$) ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر وبذلك تتعين النقطة 'C .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_C$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى 'C مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{CB}$ (وهو يساوي الطول من 'B إلى 'C مضروبا في مقياس الرسم) فنجد بالقياس من مضلع السرعة أن:

$V_C = 230$ mm/s
$V_{CB} = 460$ mm/s

ويكون اتجاه $\underline{V}_C$ إلى أعلى كما يظهر من مضلع السرعة (أي في اتجاه السهم المرسوم من O_v إلى 'C). ويحسب مقدار ω_2 من العلاقة:

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{R_{CB}} = \frac{460}{200} = 2.3 \text{ rad/s}$$

أما اتجاه ω_2 فهو عكس عقرب الساعة كما يتبين من شكل 8–4(a) حيث تجعل السرعة $\underline{V}_{CB}$ المتجه $\underline{R}_{CB}$ يميل للدوران عكس عقرب الساعة.

ولإيجاد سرعة النقطة Q ننسب سرعتها لسرعة نقطة أخرى معلومة السرعة على الضلع 2 مثل النقطة B عن طريق المعادلة:

$$\overset{\surd\surd}{\underline{V}_{QB}} = \overset{oo}{\underline{V}_{Q}} - \overset{\surd\surd}{\underline{V}_{B}} \qquad (8\text{–}2)$$

حيث $\underline{V}_{QB}$ هي سرعة النقطة Q بالنسبية إلى النقطة B وهي فرق السرعتين (باستعمال المتجهات وليس مجرد الفرق بين المقدارين) وتساوي:

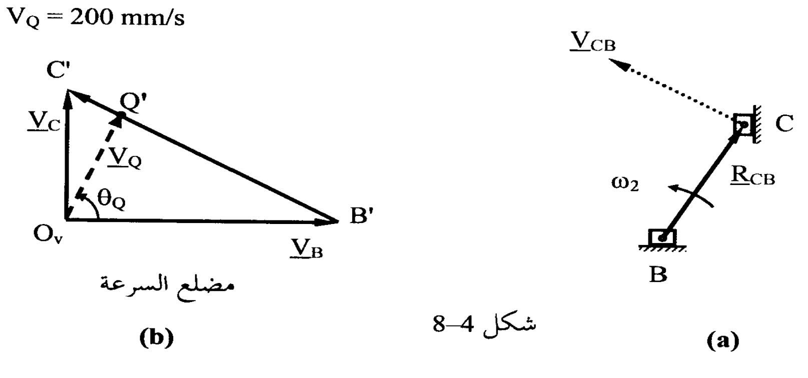
$$\underline{V}_{QB} = \underline{\omega}_2 \times \underline{R}_{QB}$$

ومقدار هذه السرعة النسبية هو:

$$V_{QB} = \omega_2 R_{QB} = (2.3)(160) = 368 \text{ mm/s}$$

واتجاه هذه السرعة النسبية عمودي على BQ (موازي للسرعة $\underline{V}_{CB}$ المبينة في شكل (a)4–8). وفي المعادلة (2–8) مجهولان هما مقدار واتجاه السرعة $\underline{V}_{Q}$ ، وتحل هذه المعادلة بتكملة مضلع السرعة بتعيين النقطة 'Q كما في شكل (b)4–8 حيث الطول 'B'Q يساوي السرعة النسبية V_{QB} أي يساوي 368 (بمقياس الرسم المستعمل). ويكون مقدار $\underline{V}_{Q}$ بالقياس من مضلع السرعة (وهو يساوي الطول من O_v إلى 'Q مضروبا في مقياس الرسم) هو:

$$V_Q = 200 \text{ mm/s}$$



شكل 4–8

واتجاه $\underline{V}_{Q}$ هو (بالقياس من مضلع السرعة)

$$\theta_Q = 66^o$$

والطريقة الأخرى والأسهل لتعيين النقطة 'Q هي استعمـــال خواص صورة السرعة للضلع velocity image أو صورة الجسم في مضلع السرعة ، حيث نرى أن

B'C' هو صورة للضلع الأصلي BC وهذه الصورة تكون على زاوية 90^o مع الجسم الأصلي في اتجاه السرعة الزاوية للجسم ω_2 ، أي عكس عقرب الساعة. ولأن الصورة متشابهة هندسيا مع الأصل يكون:

$$\frac{B'Q'}{BQ} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$B'Q' = \frac{B'C'}{BC} BQ = \frac{460}{200} 160 = 368 \text{ mm/s}$$

ومن ثم نعين النقطة Q' بحيث يكون الطول B'Q' يساوي 368 (بمقياس الرسم المستعمل) كما في شكل 8–4(b). وكما سبق نقيس مقدار $\underline{V}_Q$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى Q' مضروبا في مقياس الرسم) واتجاه $\underline{V}_Q$ وهو الزاوية θ_Q .

مثال 8–3

في آلية المنـــزلق المنحرف المبينة في شكل 8–5(a) عين مقدار واتجاه سرعة كل من المنـــزلق C والنقطة Q واحسب السرعة الزاوية لذراع التوصيل 3 عندما تكون $\theta_2 = 45^o$ ، علما بأن ذراع الدوران يدور عكس عقرب الساعة بسرعة زاوية $\omega_2 = 100$ rev/min. الأبعاد هي:

$O_2B = 200$ mm, $BC = 570$ mm, $BE = 200$ mm , $EQ = 250$ mm ,

وقيمة الانحراف 145 mm.

الحل: نركز الانتباه على المفصلات hinges لأننا إذا أوجدنا سرعاتها يمكننا إيجاد سرعات النقط الأخرى بينها. ولأن سرعة ذراع الدوران O_2B معلومة نبدأ بإيجاد سرعة الوصلة B .

$\omega_2 = 100(2\pi)/(60) = 10.47$ rad/s

$V_B = \omega_2 R_{BO_2} = (10.47)(200) = 2094$ mm/s

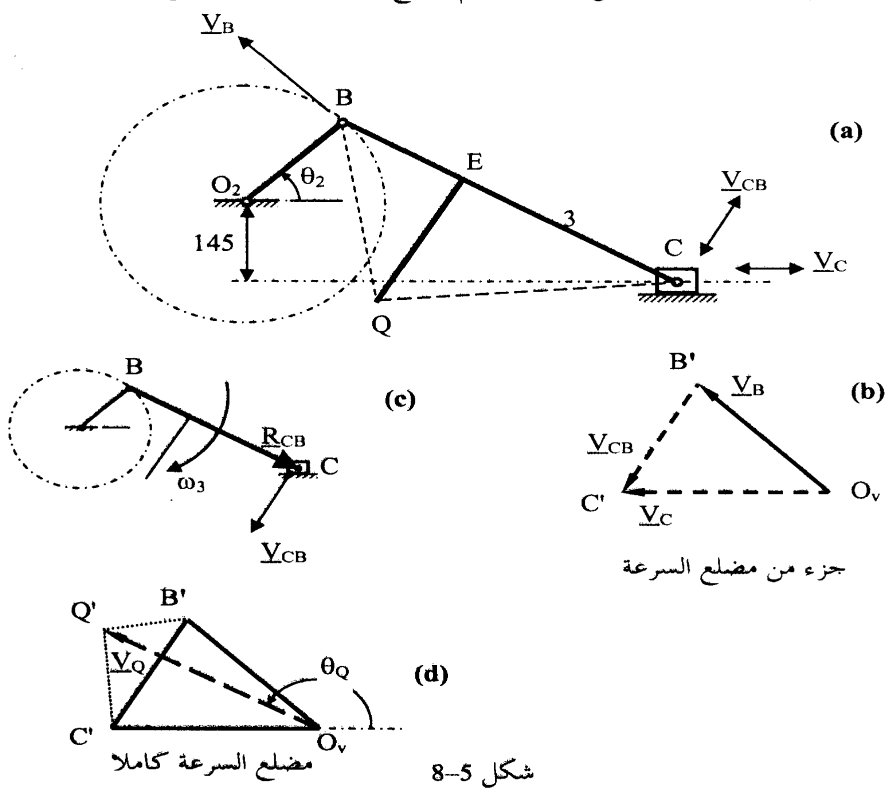
وهي عمودية على ذراع الدوران O_2B كما هو موضح في شكل 8–5(a) . والآن ننسب سرعة الوصلة C إلى B :

0 √   0 √   √ √

$$\underline{V}_{CB} = \underline{V}_C - \underline{V}_B \qquad (8\text{–}3)$$

حيث اتجاه $\underline{V}_C$ أفقيا في اتجاه حركة المنـــزلق (بينا هذا في شكل 8–5(a) بسهم أفقي ذو اتجاهين للتأكيد على أننا في هذه المرحلة من الحل لا نعلم ما إذا كان الاتجاه

يمينا أو يسارا) ، وحيث اتجاه السرعة النسبية $\underline{V}_{CB}$ عمودي على الخط BC (كما هو موضح في شكل 8-5(a) بسهم ذو اتجاهين أيضا) . والمجهولان في المعادلة (8-3) هما مقداري $\underline{V}_C$ و $\underline{V}_{CB}$ ولحل المعادلة نرسم مضلع السرعة المبين في شكل 8-5(b):



شكل 8-5

* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 2094 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_B$ وبذلك نكون قد عينا النقطة B' ، ومن O_v أيضا نرسم خطا أفقيا موازيا للسرعة $\underline{V}_C$ (يظهر في الشكل متقطعا لأنه مجهول الطول).

* من B' نرسم خطا متقطعا عموديا على الضلع BC (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{CB}$)

ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة 'C .

*نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_C$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى 'C مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{CB}$ (وهو يساوي الطول من 'B إلى 'C مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

$V_C = 2340$ mm/s
$V_{CB} = 1710$ mm/s

ويكون اتجاه $\underline{V}_C$ إلى اليسار لأن السهم من O_v إلى 'C في مضلع السرعة يتجه ناحية اليسار. ويحسب مقدار ω_3 من العلاقة :

$$\omega_3 = \frac{V_{CB}}{R_{CB}} = \frac{1710}{570} = 3 \text{ rad/s}$$

وتكون ω_3 في اتجاه عقرب الساعة كما يتبين من شكل 8–4(c) حيث تجعل السرعة النسبية $\underline{V}_{CB}$ المتجه $\underline{R}_{CB}$ يدور مع عقرب الساعة كما هو مبين بالشكل.

وأسهل طريقة لإيجاد سرعة النقطة Q هي رسم صورة الضلع 3 في مضلع السرعة ، ويتم ذلك كما هو موضح في شكل 8–5(d) برسم 'B'Q عمودي على BQ ورسم 'C'Q عمودي على CQ فيتقاطع العمودان في 'Q . وبذلك يكون المثلث 'B'C'Q هو صورة المثلث BCQ في مضلع السرعة ، ويكون مقدار $\underline{V}_Q$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى 'Q مضروبا في مقياس الرسم) بالقياس من مضلع السرعة هو:

$V_Q = 2770$ mm/s

واتجاه $\underline{V}_Q$ هو (بالقياس من مضلع السرعة)

$\theta_Q = 151^o$

مثال 8–4

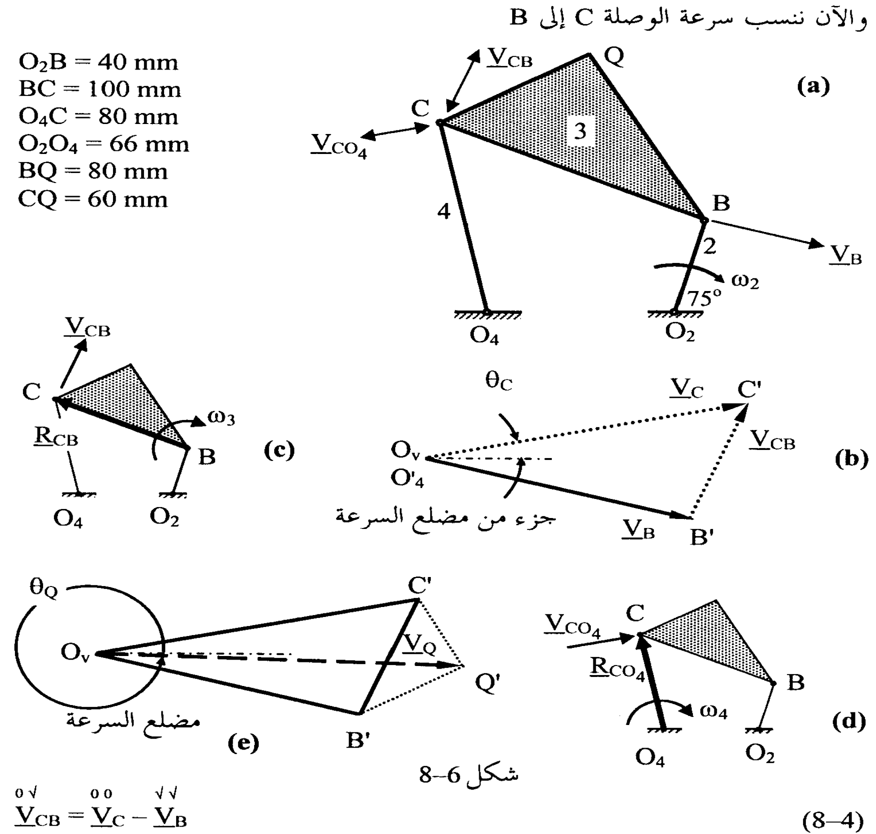
في الآلية المبينة في شكل 8–6 احسب السرعات الزاوية للأضلاع 3 , 4 ثم عين سرعة النقطة Q مقدارا واتجاها ، علما بأن الذراع O_2B يدور في اتجاه عقرب الساعة بسرعة زاوية $\omega_2 = 40$ rad/s .

الحل: نركز الانتباه على المفصلات hinges لأننا إذا أوجدنا سرعاتها يمكننا إيجاد سرعات النقط الأخرى بينها. ولأن سرعة دوران الذراع O_2B معلومة نبدأ بإيجاد سرعة الوصلة B .

$V_B = \omega_2 R_{BO_2} = (40)(40) = 1600$ mm/s

وهي عمودية على ذراع الدوران O_2B كما هو موضح في شكل 8–6(a) .

والآن ننسب سرعة الوصلة C إلى B



شكل 8-6

$$\underset{\circ\surd}{\underline{V}_{CB}} = \underset{\circ\circ}{\underline{V}_{C}} - \underset{\surd\surd}{\underline{V}_{B}} \qquad (8\text{–}4)$$

حيث اتجاه السرعة النسبية $\underline{V}_{CB}$ عمودي على الخط BC (كما هو موضح في شكل (a)8–6 بسهم ذو اتجاهين للتأكيد على أننا في هذه المرحلة من الحل لا نعلم ما إذا كان الاتجاه لأعلى أو لأسفل) . وهذه المعادلة تحتوي على ثلاثة مجاهيل فلا يمكن إيجادهم بحل المعادلة ، ولذلك يجب أن نتخلص من أحد هذه المجاهيل. ويتم ذلك بنسبة سرعة الوصلة C إلى وصلة أخرى معلومة السرعة وتشاركها في نفس الضلع الجامد ، وهذه الصفات متوفرة في الوصلة O_4 :

$$\overset{o\surd}{\underline{V}}_{CO_4} = \overset{oo}{\underline{V}}_C - \overset{\surd\surd}{\underline{V}}_{O_4} \tag{8–5}$$

وبملاحظة أن $\underline{V}_{O_4} = 0$ وبالتعويض من (8–5) في (8–4) نحصل على:

$$\overset{o\surd}{\underline{V}}_{CB} = \overset{o\surd}{\underline{V}}_{CO_4} - \overset{\surd\surd}{\underline{V}}_B \tag{8–6}$$

حيث اتجاه $\underline{V}_{CO_4}$ عمودي على الخط CO_4 (كما هو موضح في شكل 8–6(a) بسهم ذو اتجاهين لأننا لا نعلم ما إذا كان الاتجاه يمينا أو يسارا) ، ولحل المعادلة (8–6) نرسم مضلع السرعة المبين في شكل 8–6(b):

* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 1600 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_B$ وبذلك نكون قد عينا النقطة 'B .

* النقطة O'_4 تكون منطبقة على O_v لأن سرعتها تساوي صفرا ، ومنها نرسم خطا متقطعا عموديا على O_4C (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{CO_4}$) يظهر في الشكل متقطعا لأنه مجهول الطول.

* من 'B نرسم خطا متقطعا عموديا على BC (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{CB}$) ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة 'C .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_{CO_4}$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى 'C مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{CB}$ (وهو يساوي الطول من 'B إلى 'C مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

$V_C = V_{CO_4} = 1920$ mm/s
$V_{CB} = 850$ mm/s

ويكون اتجاه $\underline{V}_{CB}$ إلى أعلى كما يظهر من مضلع السرعة. ويعرف اتجاه $\underline{V}_C$ بالزاوية θ_C وقيمتها بالقياس من شكل 8–6(b) هي:

$\theta_C = 11^o$

ويحسب مقدار ω_3 من العلاقة:

$$\omega_3 = \frac{V_{CB}}{R_{CB}} = \frac{850}{100} = 8.5 \text{ rad/s}$$

أما اتجاه ω_3 فهو في اتجاه عقرب الساعة كما يتبين من شكل 8–6(c) حيث تجعل

السرعة النسبية $\underline{V}_{CB}$ المتجه $\underline{R}_{CB}$ يميل للدوران مع عقرب الساعة.

ويحسب مقدار ω_4 من العلاقة:

$$\omega_4 = \frac{V_{CO_4}}{R_{CO_4}} = \frac{1920}{80} = 24 \text{ rad/s}$$

أما اتجاه ω_4 فهو مع عقرب الساعة كما يتبين من شكل 8–6(d) حيث تجعل السرعة $\underline{V}_{CO_4}$ المتجه $\underline{R}_{CO_4}$ يميل للدوران مع عقرب الساعة.

وأسهل طريقة لإيجاد سرعة النقطة Q هي رسم صورة الضلع 3 في مضلع السرعة، ويتم ذلك كما هو موضح في شكل 8–6(e) برسم B'Q' عمودي على BQ ورسم C'Q' عمودي على CQ فيتقاطع العمودان في Q' . ويكون مقدار $\underline{V}_Q$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى Q' مضروبا في مقياس الرسم) بالقياس من مضلع السرعة هو:

$$V_Q = 2140 \text{ mm/s}$$

واتجاه $\underline{V}_Q$ هو (بالقياس من مضلع السرعة)

$$\theta_Q = -2^\circ = 358^\circ$$

8.2 ملخص خواص مضلع السرعة

من الأمثلة السابقة يمكن تلخيص أهم خواص مضلع السرعة كما يلي (انظر شكل 8–6):

* كل نقطة أو وصلة في الآلية الأصلية (مثلا Q) تمثلها نقطة في مضلع السرعة (Q') نسميها صورة النقطة في مضلع السرعة.

* السرعة المطلقة لأي نقطة (أي السرعة بالنسبة للقاعدة الثابتة) تقاس مقدارا واتجاها من نقطة الأصل O_v إلى صورة النقطة في مضلع السرعة. أما السرعة النسبية بين نقطتين مثل C و Q (أي $\underline{V}_{CQ}$) فتقاس من Q' إلى C'.

* جرت العادة في حالة السرعة المطلقة أن يكتب رمز النقطة المعنية فقط ، فمثلا $\underline{V}_B$ هي السرعة المطلقة للنقطة B (ولا تكتب $\underline{V}_{BO_v}$). أما في حالة السرعة النسبية فلابد من كتابة رمزين لبيان النقطتين المعنيتين ، فمثلا $\underline{V}_{BQ}$ هي سرعة النقطة B نسبة

إلى النقطة Q .

*كل ضلع في الآلية الأصلية له صورة في مضلع السرعة عمودية على الضلع الأصلي في الآلية ، ومثال ذلك أن Q'C' عمودي على QC ، أي أن صورة الضلع في مضلع السرعة تكون على زاوية 90^o مع الضلع الأصلي في اتجاه السرعة الزاوية للجسم الذي تقع عليه النقطتان C و Q ، أي ω_3 في المثال 4-8.

*صورة الضلع متشابهة هندسيا مع الأصل أي أن الزوايا في كل من الأصل والصورة متساوية والأبعاد متناسبة .

* كل نقطة أو وصلة على القاعدة في الآلية الأصلية (مثلا O_2 , O_4) تمثلها نقطة في مضلع السرعة تنطبق على نقطة الأصل (O_v) لأن القاعدة سرعتها صفر.

* السرعة النسبية $\underline{V}_{QC}$ بين نقطتين مثل C و Q تقاس من 'C إلى 'Q طبقا للمعادلة:

$$\underline{V}_{QC} = \underline{V}_Q - \underline{V}_C \qquad (8\text{–}7)$$

وهذه المعادلة عامة بين أي نقطتين حتى لو لم تقعا على ضلع واحد. وفقط في الحالة الخاصة التي تكون فيها **النقطتان جزء من ضلع جامد** (أي أن المسافة بينهما لا تتغير أثناء الحركة) يكون:

$$\underline{V}_{QC} = \underline{\omega}_{QC} \times \underline{R}_{QC} \qquad (8\text{–}8)$$

ويكون مقدار هذه السرعة النسبية هو:

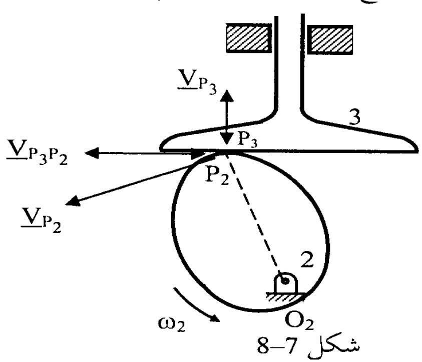
$$V_{QC} = \omega_{QC}\ R_{QC} \qquad (8\text{–}9)$$

واتجاهها عموديا على $\underline{R}_{QC}$. لاحظ في شكل 6-8 أن $\underline{V}_{QO_4}$ مثلا (المتجه من O'_4 إلى 'Q) ليس عموديا على $\underline{R}_{QO_4}$ (المتجه من O_4 إلى Q في الآلية الأصلية) وذلك لأن O_4 و Q لا يجمعهما ضلع متماسك واحد (ولذلك تتغير المسافة بينهما أثناء الحركة).

8.3 التلامس المباشر- الحركة الانزلاقية

كثير من أجزاء الآليات تدور بالتلامس مع أسطح أجزاء أخرى مع انزلاق أسطح التلامس على بعضها ، وقد بينا في الفصل الأول أن الانزلاق يحدث نتيجة لوجود حركة نسبية بين نقطتي تلامس الجسمين (أي أن السرعة المطلقة لنقطتي التلامس غير

متساوية) ، وأن السرعة النسبية بين نقطتي التلامس يجب أن تكون في اتجاه المماس المشترك للجسمين عند موضع التلامس. ومثال ذلك آلية الكامة المبينة في شكل 7–8 حيث سرعة نقطة التلامس على الكامة $\underline{V}_{P_2}$ عمودية على O_2P_2 ومقدارها معلوم لأن ω_2 معلومة ، بينما سرعة نقطة التلامس على التابع $\underline{V}_{P_3}$ رأسية لأعلى ولكنها مجهولة المقدار. ويكون فرق السرعتين $\underline{V}_{P_3P_2}$ هو السرعة النسبية واتجاهه أفقيا وهو اتجاه المماس المشترك للكامة والتابع ومقدارها غير معلوم.



شكل 7–8

مثال 5–8

الذراع O_2B المبين في شكل 8–8 طوله 10.2 cm ويدور بسرعة زاويـــة $\omega_2 = 30$ rad/s مع عقرب الساعة. احسب السرعة الزاوية للضلع 3 الذي طوله 20.3 cm وللمنـــزلق 4 . النقطة D هي مركز تقعر السطح الذي يتحرك عليه المنـــزلق. الأبعاد في الشكل بالسنتيمتر.

الحل: نبدأ بإيجاد سرعة الوصلة B لأن سرعة ذراع الدوران O_2B معلومة.

$$V_B = \omega_2 R_{BO_2} = (30)(10.2) = 306 \text{ cm/s}$$

وهي عمودية على ذراع الدوران O_2B كما هو موضح في شكل 8–8 . والآن ننسب سرعة الوصلة C إلى B

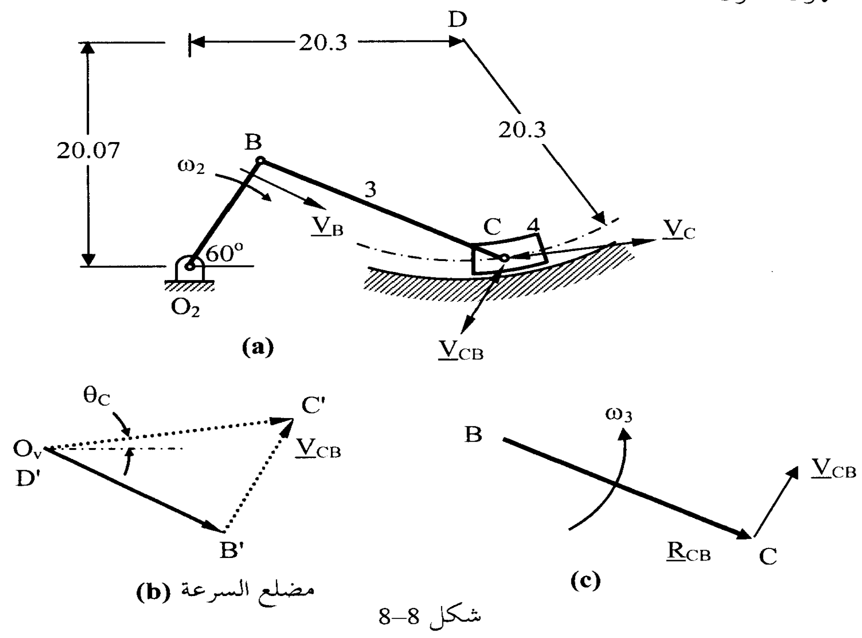
$$\overset{0\,\surd}{\underline{V}_{CB}} = \overset{0\,\surd}{\underline{V}_{C}} - \overset{\surd\,\surd}{\underline{V}_{B}} \qquad (8\text{–}10)$$

حيث اتجاه السرعة النسبية $\underline{V}_{CB}$ عمودي على الخط $\underline{R}_{CB}$ (كما هو موضح في شكل 7–8 بسهم ذو اتجاهين للتأكيد على أننا في هذه المرحلة من الحل لا نعلم ما إذا كان

الاتجاه لأعلى أو لأسفل) . أما السرعة $\underline{V}_C$ فاتجاهها هو اتجاه حركة المنـــزلق ، أي مماسة للقوس الدائري الذي مركزه النقطة D. ولحل المعادلة (8–10) نرسم مضلع السرعة المبين في شكل (b)8–8:

* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 306 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_B$ وبذلك نكون قد عينا النقطة 'B .

* النقطة 'D تكون منطبقة على O_v لأن سرعتها تساوي صفرا ، ومنها نرسم خطا متقطعا عموديا على DC (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_C$) وهو يظهر في الشكل متقطعا لأنه مجهول الطول.



(a)

مضلع السرعة (b) (c)

شكل 8–8

* من 'B نرسم خطا متقطعا عموديا على BC (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{CB}$) ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة 'C .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_C$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى 'C مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{CB}$ (وهو يساوي الطول من 'B إلى 'C مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

$V_C = V_{CD} = 370$ cm/s
$V_{CB} = 232$ cm/s

ويعرف اتجاه $\underline{V}_C$ بالزاوية θ_C وقيمتها بالقياس من شكل 8–8(b) هي:
$\theta_C = 8^o$

ومن المعادلة (9–8)

$\omega_3 = V_{CB} / R_{CB} = (232) / (20.3) = 11.43$ rad/s

واتجاه ω_3 عكس عقرب الساعة لأن $\underline{V}_{CB}$ اتجاهها لأعلى وهي تجعل المتجه $\underline{R}_{CB}$ يميل للدوران عكس عقرب الساعة كما هو مبين في شكل 8–8(c) . ويتم حساب ω_4 وهي سرعة دوران المنـــزلق من المعادلة (9–8) وذلك ممكن لأن مركز المنـــزلق C يتحرك على قوس دائري مركزه D بحيث إن المسافة CD لا تتغير أثناء الحركة (فكأنما هناك ضلع جامد يصل بين النقطتين C و D ، ووجود هذا الضلع أو عدمه لا يؤثر على صحة المعادلة)

$\omega_4 = V_{CD} / R_{CD} = (370) / (20.3) = 18.23$ rad/s

حيث $\underline{V}_{CD} = \underline{V}_C$ ، واتجاه ω_4 يكون عكس عقرب الساعة لأن $\underline{V}_{CD}$ اتجاهها لليمين وهي تجعل المتجه $\underline{R}_{CD}$ يميل للدوران عكس عقرب الساعة (المتجه $\underline{R}_{CD}$ هو السهم من D إلى C وهو غير مبين في الشكل للمحافظة على وضوح الشكل ومنع ازدحامه).

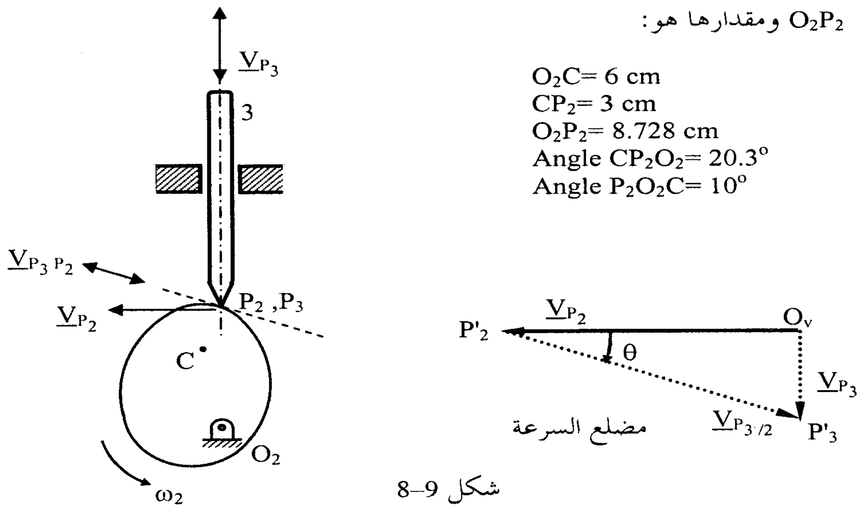
ملحوظة: يمكن أيضا حل هذه الآلية باستعمال الآلية الرباعية المكافئة O_2BCD ويمكن حل الآلية المكافئة بيانيا برسم مضلع السرعة ، أو تحليليا كما يوضح ذلك مثال 3–6 .

مثال 6–8

الكامة المبينة في شكل 9–8 تدور عكس عقرب الساعة بسرعة $\omega_2 = 10$ rad/s. احسب السرعة الخطية للتابع في اللحظة المبينة بالشكل .

الحل:

النقطة P هي نقطة التلامس بين التابع والكامة ، والنقطة C هي مركز انحناء سطح الكامة عند نقطة التلامس. سرعة نقطة التلامس على الكامة $\underline{V}_{P_2}$ عمودية على O_2P_2 ومقدارها هو:



شكل 9–8

$V_{P_2} = \omega_2 R_{P_2O_2} = (10)(8.728) = 87.28$ cm/s

نقطة التلامس على التابع هي النقطة P_3 وسرعتها $\underline{V}_{P_3}$ رأسية لأعلى ولكنها مجهولة المقدار. ويكون فرق السرعتين $\underline{V}_{P_3P_2}$ هو السرعة النسبية واتجاهها هو اتجاه المماس المشترك للكامة والتابع (كما هو موضح في شكل 9–8) ومقدارها غير معلوم. والعلاقة بين هذه السرعات هي:

$$\overset{0\surd}{\underline{V}_{P_3P_2}} = \overset{0\surd}{\underline{V}_{P_3}} - \overset{\surd\surd}{\underline{V}_{P_2}} \qquad (8\text{-}11)$$

ولحل المعادلة (8–11) نرسم مضلع السرعة المبين في شكل 9–8:

* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 87.28 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_{P_2}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة P'_2 .

* من O_v نرسم خطا رأسيا (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{P_3}$) يظهر في الشكل متقطعا

لأنه مجهول الطول.

* من P'_2 نرسم خطا متقطعا موازيا للسرعة $\underline{V}_{P_3 P_2}$ ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة P'_3 .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_{P_3}$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى P'_3 مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{P_3 P_2}$ (وهو يساوي الطول من P'_2 إلى P'_3 مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

$V_{P_3} = 32.3$ cm/s

$V_{P_3 P_2} = 93$ cm/s

والجدير بالذكر أن طريقة السرعة النسبية ، التي هي موضوع الباب الحالي، لا تستلزم بالضرورة حل المعادلات الاتجاهية بيانيا باستعمال الرسم الدقيق والقياس منه لإيجاد السرعات بل يمكن استعمال أساسيات الهندسة المستوية لحساب السرعات المطلوبة. فمثلا في شكل 8–9 بملاحظة أن الزاوية $O_v P'_2P'_3$ تساوي الزاوية CP_2O_2 وتساوي 20.3^o ، ومن المثلث $O_v P'_2P'_3$ القائم الزاوية تكون:

$V_{P_3} = V_{P_2} \tan(20.3^o) = 32.27$ cm/s

$V_{P_3 P_2} = V_{P_2} / \cos(20.3^o) = 93$ cm/s

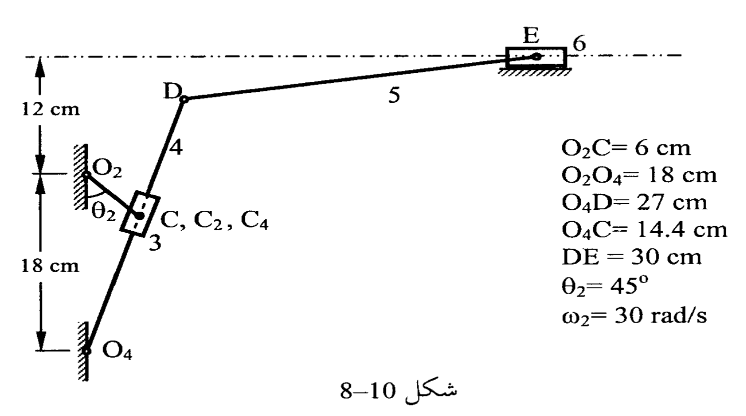
وغني عن القول إن استنتاج السرعات في الآليات باستخدام العلاقات الهندسية وحساب المثلثات يصبح عملية معقدة كلما زاد عدد أضلاع الآلية وكانت بعض أضلاعها مقوسة ، وهذا يفسر سبب استخدام معظم المراجع للرسم كوسيلة أساسية (ووحيدة) لتحليل السرعة.

ملحوظة: يمكن أيضا حل هذه الآلية باستعمال الآلية المكافئة وهي في هذه الحالية آلية المنـــزلق كما يوضح ذلك مثال 6–6 .

مثال 7–8

في آلية العودة السريعة المبينة في شكل 10–8 يدور الذراع O_2C مع عقرب الساعة بسرعة منتظمة $\omega_2 = 30$ rad/s . احسب السرعة الزاوية للضلعين 4 , 5 والسرعة الخطية للنقط E , D في اللحظة المبينة بالشكل .

الحل: هذا المثال يوضح حالة انزلاق أحد الأضلاع على ضلع آخر متحرك حيث يتحرك المنـــزلق 3 على الذراع O_4D الذي يدور في حركة دائرية حول O_4. وهذه الآلية تتكون من حلقتين مقفلتين: الأولى هي آلية المنـــزلق المنعكس (الذراع O_2C والأضلاع 3 , 4) ، والثانية هي آلية المنـــزلق المنحرف (الأضلاع 4 , 5 , 6). والحل يبدأ بالحلقة المقفلة الأولى لأن سرعة ذراع الدوران O_2C معلومة. ويجب ملاحظة أن هناك نقطتان C_2 , C_3 منطبقتان في كل الأوقات حيث نقطة C_3 هي جزء لا يتجزأ من المنـــزلق ثابتة فيه وتتحرك معه بينما C_2 هي جزء من الذراع O_2C . ولابد من التفرقة بين هاتين النقطتين (أي C_2 , C_3) وبين نقطة أخرى هي C_4 منطبقة على C_2 في اللحظة المبينة بالرسم ولكنها جزء لا يتجزأ من الذراع 4 . وبعد مرور فترة زمنية قصيرة، تتحرك C_2 مع المنـــزلق بينما تتحرك C_4 مع الذراع 4 وتنفصل النقطتان عن بعضهما. ويمكن إيجاد سرعة النقطة C_2 من العلاقة:



شكل 8–10

$$V_{C_2} = \omega_2 R_{C_2O_2} = (30)(6) = 180 \text{ cm/s}$$

وهي عمودية على ذراع الدوران O_2C كما هو موضح في شكل 8–11(a) . والآن ننسب سرعة النقطة C_2 إلى C_4 وذلك بملاحظة أنه إذا التصق شخص مع الذراع O_4D وتحرك معه فإنه يرى المنـــزلق (ومعه النقطة C_2) يتحرك فقط على طول الخط O_4D وهذه الحركة هي الحركة الظاهرية للنقطة C_2 على الضلع 4 أي أن الخط O_4D

هو مسار C_2 على 4. ومعادلة الحركة الظاهرية هي:

$$\overset{0\,\surd}{\underline{V}_{C_{2/4}}} = \overset{\surd\,\surd}{\underline{V}_{C_2}} - \overset{0\,\surd}{\underline{V}_{C_4}} \qquad (8\text{–}12)$$

حيث $\underline{V}_{C_2}$ هي السرعة المطلقة للنقطة C_2 وهي معلومة مقدارا واتجاها ، $\underline{V}_{C_4}$ هي السرعة المطلقة للنقطة C_4 وهي عمودية على الخط O_4C كما هو موضح في شكـــل 8–11(a) ومقدارها مجهول ، أما $\underline{V}_{C_{2/4}}$ فهي السرعة الظاهرية[1] وهي سرعة C_2 كما تظهر بالنسبة للضلع 4 . واتجاه السرعة الظاهرية يكون دائما مماسا لمسار C_2 على 4 ومقدارها مجهول.

ولحل المعادلة (12–8) نرسم مضلع السرعة المبين في شكل 8–11(b):

* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 180 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_{C_2}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة C'_2 .

* من O_v نرسم خطا عموديا على O_4D (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{C_4}$) يظهر في الشكل متقطعا لأنه مجهول الطول.

* من C'_2 نرسم خطا متقطعا موازيا للخط O_4D (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{C_{2/4}}$) ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة C'_4 .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_{C_4}$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى C'_4 مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{C_{2/4}}$ (وهو يساوي الطول من C'_4 إلى C'_2 مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن

$$V_{C_4} = 84\ \text{cm/s}$$

$$V_{C_{2/4}} = 159\ \text{cm/s}$$

ومن المعادلة (9–8)

$$\omega_4 = V_{C_4} / R_{C_4O_4} = (84)/(14.4) = 5.84\ \text{rad/s CCW}$$

---

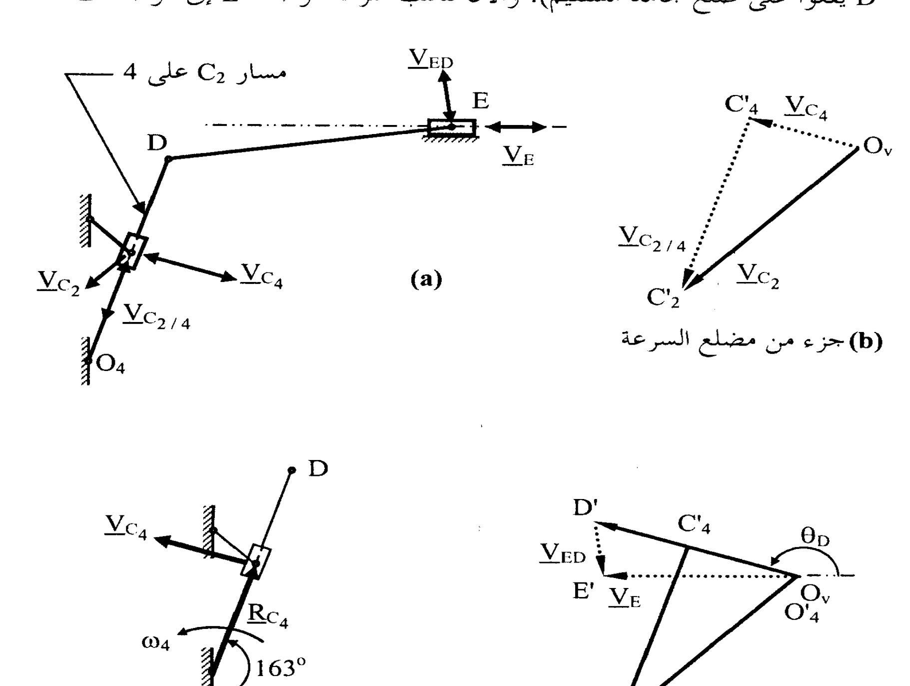
(١) تسمي بعض المراجع هذه السرعة بالسرعة النسبية ولكننا نعتقد أن مصطلح السرعة الظاهرية يدل بوضوح أننا بصدد حالة خاصة من حالات الحركة النسبية فيها تتحرك نقطة (النقطة C_2 في المثال الحالي) طبقا لمسار معين على ضلع آخر في الآلية (الضلع 4).

واتجاه ω_4 عكس عقرب الساعة CCW لأن $\underline{V}_{C_4}$ إلى اليسار وهي تجعل المتجه $\underline{R}_{C_4}$ يميل للدوران عكس عقرب الساعة كما هو موضح في شكل 8-11(c) .

ولإيجاد سرعة E والسرعة الزاوية للضلع 5 نحل الحلقة المغلقة الثانية O_4DE ونبدأ ذلك بحساب سرعة الوصلة D

$$V_D = \omega_4 R_{DO_4} = (5.84)(27) = 157.7 \text{ cm/s} \qquad (8-13)$$

وهي عمودية على الذراع O_4D أي أن زاويتها مع الأفقي هي $\theta_D = 163^\circ$ كما هو موضح في شكل 8-11(d) (النقطة D' تقع على امتداد الخط $O_v C'_4$ لأن O_4 و C_4 و D يقعوا على ضلع جامد مستقيم). والآن ننسب سرعة الوصلة E إلى الوصلة D :



شكل 8-11

$$\underline{V}_{ED} = \underline{V}_E - \underline{V}_D \quad (8\text{–}14)$$

حيث اتجاه السرعة النسبية $\underline{V}_{ED}$ عمودي على الخط $\underline{R}_{ED}$ (كما هو موضح في شكل 8–11(a) بسهم ذو اتجاهين للتأكيد على أننا في هذه المرحلة من الحل لا نعلم ما إذا كان الاتجاه لأعلى أو لأسفل) . أما السرعة $\underline{V}_E$ فاتجاهها أفقي وهو اتجاه حركة المنـــزلق. ولحل المعادلة (8–14) نرسم مضلع السرعة المبين في شكل 8–11(d):

* من نقطة الأصل O_v نرسم سهما طوله 157.7 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_D$ وبذلك نكون قد عينا النقطة 'D .

* من O_v نرسم خطا أفقيا (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_E$) يظهر في الشكل متقطعا لأنه مجهول الطول.

* من 'D نرسم خطا متقطعا عموديا على الخط ED (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{ED}$) ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة 'E .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_E$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى 'E مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{ED}$ (وهو يساوي الطول من 'D إلى 'E مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

$V_{ED} = 47$ cm/s

$V_E = 144$ cm/s

واتجاه $\underline{V}_E$ ناحية اليسار (في اتجاه السهم من O_v إلى 'E). ومن المعادلة (8–9)

$\omega_5 = V_{ED} / R_{ED} = (47) / (30) = 1.57$ rad/s

أما اتجاه ω_5 فهو مع عقرب الساعة CW.

ملحوظة: بدلا من حساب V_D بدلالة ω_4 كما في المعادلة (8–13) يمكن استعمال خواص صورة الذراع O_4D في مضلع السرعة لتعيين النقطة 'D :

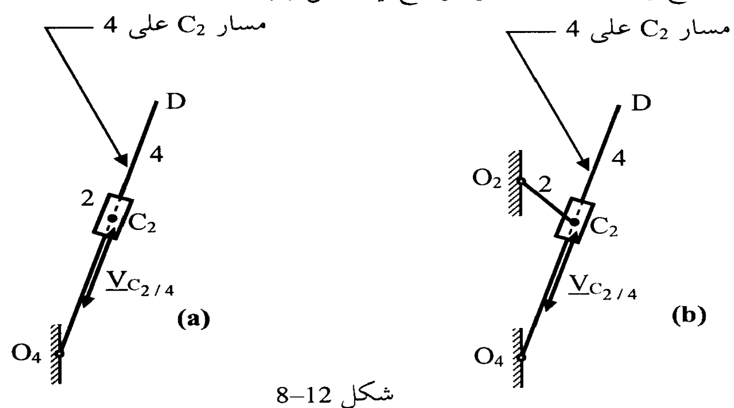
$$\frac{O'_4 C'_4}{O_4 C} = \frac{O'_4 D'}{O_4 D}$$

$$V_D = O'_4D' = \frac{O'_4 C'_4}{O_4 C}\ O_4D = \frac{84}{14.4}\ (27) = 157.5 \text{ cm/s}$$

وهذه الطريقة لتعيين 'D (ومنها V_D) لا تتطلب حساب ω_4 ، وهي مفيدة علي وجه الخصوص عند رسم مضلع العجلة كما سنبين ذلك في الفصل التاسع.

8.4 ملاحظات على الحركة الظاهرية

تعرضنا حتى الآن لانزلاق جسمين على بعضهما وناقشنا مصطلح السرعة الظاهرية ولكننا هنا نعمق هذا المفهوم ونضرب أمثلة له لأهميته ، خاصة عند رسم مضلع العجلة. فإذا بدأنا بشكل 12(a)–8 حيث يتحرك المنـــزلق 2 على طول الذراع 4 نرى أن حركة نقطة مثبتة في المنـــزلق ، مثل C_2 ، تبدو لشخص مثبت في ويتحرك مع الذراع 4 وكأنها تتحرك فقط على الذراع O_4D مع أن الواقع أن حركة هذه النقطة بالنسبة للقاعدة الثابتة تكون غير ذلك وتعتمد على دوران الذراع بالإضافة إلى حركة المنـــزلق على الذراع. بذلك نكون قد عرفنا المسار الظاهري للنقطة C_2 على ضلع 4 وهو الخط O_4D . وهذا المسار الظاهري لا يتغير بإضافة أضلاع أخرى إلى الذراع والمنـــزلق كما هو موضح في شكل 12(b)–4 .

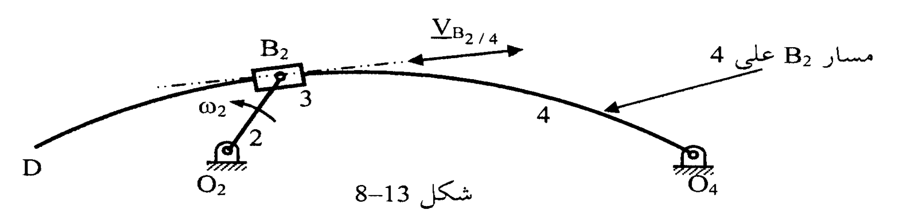


شكل 12–8

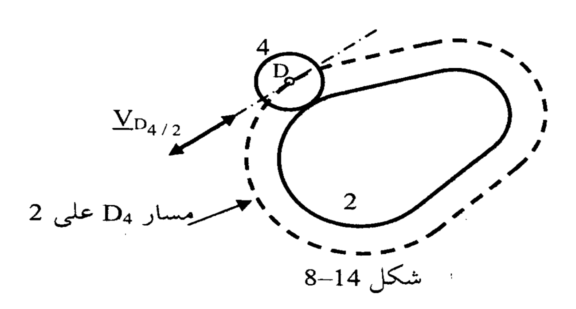
وبنفس الطريقة نرى في شكل 13–8 أن مسار B_2 (نقطة على المنـــزلق 2) على الذراع المقوس 4 هو نفسه القوس الذي يمثل الذراع.

وفي شكل 14–8 إذا تحرك القرص الدائري 4 بحيث يلامس سطح الكامة 2

في كل الأوقات (وسواء كانت الكامة نفسها تتحرك أو ثابتة) فإن الحركة الظاهرية لمركز القرص D_4 على الكامة 2 هو الخط المتقطع الموازي للكامة ، وتكون السرعة الظاهرية للمركز $\underline{V}_{D_{4/2}}$ مماسة للمسار وذلك سواء كان القرص الدائري 4 ينـــزلق أو يتدحرج على الكامة.



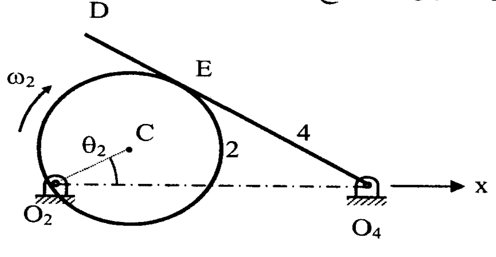
شكل 13–8



شكل 14–8

مثال 8–8

تدور الكامة 2 المبينة في شكل 15–8 بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 40$ rad/s في اتجاه عقرب الساعة. احسب السرعة الزاوية للذراع 4.



$O_2C = 50$ mm
$O_2O_4 = 200$ mm
$CE = 60$ mm
$O_4C = 158.68$ mm
$\theta_2 = 30^o$
$\omega_2 = 40$ rad/s

شكل 15–8

الحل: نلاحظ أن الكامة الدائرية 2 تلامس الذراع 4 في كل الأوقات وهي حالة مماثلة لشكل 14–8 ولذلك يكون المسار الظاهري لمركز الكامة C_2 على الضلع 4 هو الخط المتقطع الموازي للذراع 4 المبين في شكل 8–16(a) وتكون السرعة الظاهرية للمركز $\underline{V}_{C_{2/4}}$ في اتجاه هذا الخط.

ويجب التفرقة بين C_2 وهي مركز الكامة وبين نقطة أخرى هي C_4 منطبقة على C_2 في اللحظة المبينة بالرسم ولكنها جزء لا يتجزأ من الذراع 4 . وبعد مرور فترة زمنية قصيرة ، تتحرك C_2 مع الكامة بينما تتحرك C_4 مع الذراع 4 وتنفصل النقطتان عن بعضهما. لاحظ أن النقطة C_4 لا تظهر على الذراع المستقيم 4 المبين في شكل 15–8 ، ولكن إذا تخيلنا هذا الضلع كأنه لوح على هيئة المثلث O_4DC_4 المبين في شكل 8–16(b) علما بأن حركة الآلية لا تتأثر نهائيا بهذا التغير في شكل الضلع 4 .
ويمكن إيجاد سرعة النقطة C_2 في اللحظة المبينة بالرسم من العلاقة:

$$V_{C_2} = \omega_2 R_{C_2O_2} = (40)(50) = 2000 \text{ mm/s}$$

وهي عمودية على ذراع الدوران O_2C_2 كما هو موضح في شكل 8–16(a) .
والآن ننسب سرعة النقطة C_2 إلى C_4 بمعادلة الحركة الظاهرية وهي:

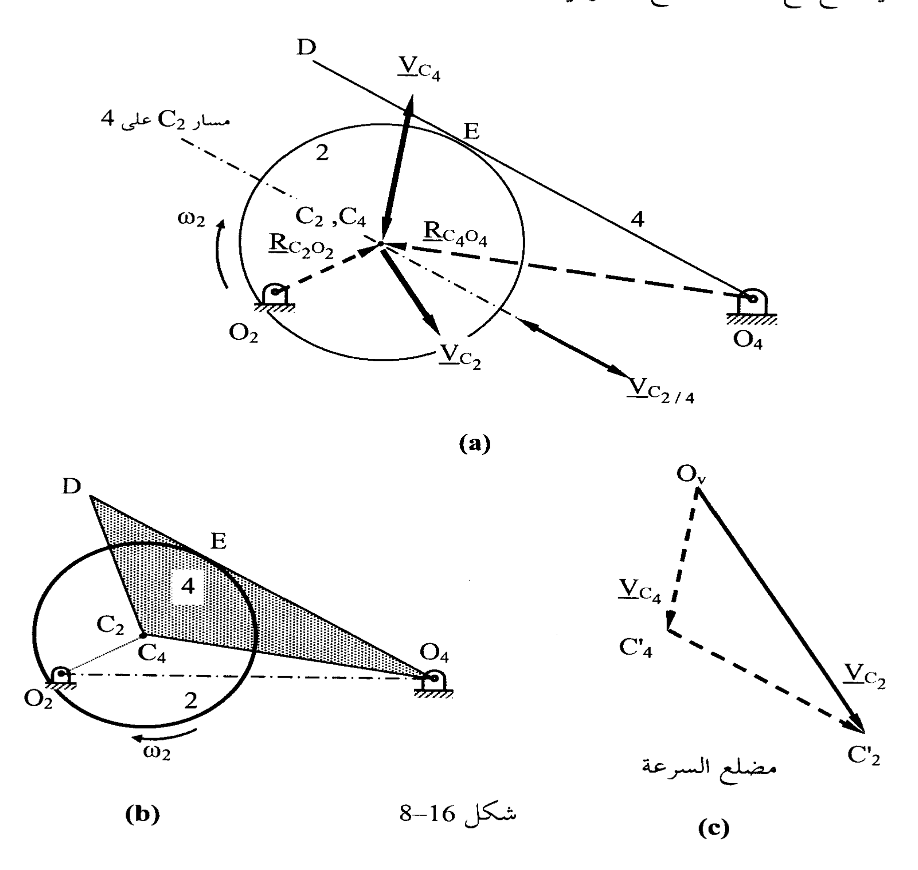
$$\overset{o\,\surd}{\underline{V}_{C_{2/4}}} = \overset{\surd\,\surd}{\underline{V}_{C_2}} - \overset{o\,\surd}{\underline{V}_{C_4}} \qquad (8\text{–}15)$$

حيث $\underline{V}_{C_2}$ **هي السرعة المطلقة للنقطة C_2 وهي معلومة مقدارا واتجاها ، $\underline{V}_{C_4}$ هي السرعة المطلقة للنقطة C_4 وهي عمودية على الخط O_4C_4 كما هو موضح في شكل 8–16(a) ومقدارها مجهول، أما $\underline{V}_{C_{2/4}}$ فهي السرعة الظاهرية وهي سرعة C_2 كما تظهر بالنسبة للضلع 4 . ولحل المعادلة (15–8) نرسم مضلع السرعة المبين في شكل 8–16(c):**

* **نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 2000 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_{C_2}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة C'_2 .**

* **من O_v نرسم خطا عموديا على O_4C_2 (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{C_4}$) يظهر في الشكل متقطعا لأنه مجهول الطول.**

* من C'_2 نرسم خطا متقطعا موازيا للخط $O_4\,E$ (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{C_{2/4}}$) ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة C'_4 .



(b) شكل 16-8 (c)

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_{C_4}$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى C'_4 مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{C_{2/4}}$ (وهو يساوي الطول من C'_4 إلى C'_2 مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

$V_{C_4} = 1038$ mm/s

$V_{C_{2/4}} = 1361$ mm/s

ومن المعادلة (8–9)

$\omega_4 = V_{C_4} / R_{C_4O_4} = (1038) / (158.7) = 6.54$ rad/s

واتجاه ω_4 هو عكس عقرب الساعة.

حل آخر

يعتمد هذا الحل على استعمال السرعة النسبية لنقطتي التلامس بين الكامة والذراع حيث يجب ملاحظة أن هناك نقطتين E_4 , E_2 منطبقتان في اللحظة المبينة بالرسم حيث النقطة E_2 هي جزء لا يتجزأ من الكامة ثابتة فيها وتتحرك معها بينما E_4 هي جزء لا يتجزأ من الذراع O_4E. وبعد مرور فترة زمنية قصيرة، تتحرك E_2 مع الكامة بينما تتحرك E_4 مع الذراع 4 وتنفصل النقطتان عن بعضهما. ويمكن إيجاد سرعة النقطة E_2 من العلاقة:

$V_{E_2} = \omega_2 R_{E_2O_2} = (40) / (106.6) = 4\,264$ mm/s

وهي عمودية على ذراع الدوران $O_2 E_2$ كما هو موضح في شكل 8–17(a) ، حيث طول الذراع $R_{E_2O_2}$ (وهو يساوي 106.6 mm) يمكن قياسه من رسم دقيق للآلية في اللحظة المبينة بالشكل ، أو يمكن حسابه من مبادئ الهندسة المستوية. والآن ننسب سرعة النقطة E_2 إلى E_4 وذلك بملاحظة أن السرعة النسبية $\underline{V}_{E_2 E_4}$ بين نقطتي التلامس يجب أن تكون في اتجاه المماس المشترك للجسمين عند موضع التلامس، أي في اتجاه الخط O_4E ، ومقدارها غير معلوم. وباستخدام معادلة السرعة النسبية (8–10) يكون:

$$\overset{0\,\surd}{\underline{V}_{E2\,E4}} = \overset{\surd\,\surd}{\underline{V}_{E2}} - \overset{0\,\surd}{\underline{V}_{E4}}$$

حيث السرعة المطلقة للنقطة E_4 عمودية على الخط O_4E ومقدارها غير معلوم. ولحل هذه المعادلة نرسم مضلع السرعة المبين في شكل 8–17(b):

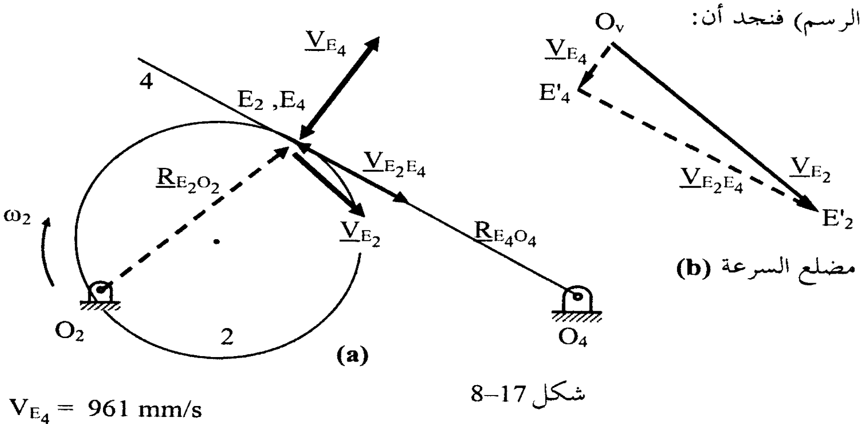
* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 4 264 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_{E_2}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة E'_2 .

* من O_v نرسم خطا عموديا على O_4E_4 (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{E_4}$) يظهر في

الشكل متقطعا لأنه مجهول الطول.

* من E'_2 نرسم خطا متقطعا موازيا للخط O_4E (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{E_2E_4}$) ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة E'_4 .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_{E_4}$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى E'_4 مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{E_2E_4}$ (وهو يساوي الطول من E'_4 إلى E'_2 مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:



شكل 8–17

$V_{E_4} = 961$ mm/s

$V_{E_2E_4} = 4\,154$ mm/s

ومن المعادلة (8–9)

$$\omega_4 = V_{E_4} / R_{E_4O_4} = (961) / (147) = 6.54 \text{ rad/s}$$

واتجاه ω_4 هو عكس عقرب الساعة ، حيث طول الذراع $R_{E_4O_4}$ (وهو يساوي 147 mm) يمكن قياسه من رسم دقيق للآلية في اللحظة المبينة بالشكل ، أو يمكن حسابه من مبادئ الهندسة المستوية.

مثال 8–9

يوضح شكل 8–18 آلية كامة فيها التابع وهو ضلع 4 يلامس الكامة عند النقطة P ، فإذا كانت الكامة تدور بسرعة زاوية $\omega_2 = 30$ rad/s عكس عقرب الساعة احسب السرعة الزاوية للضلع 4 وكذلك سرعتي نقطتي التلامس عند P .

النقطة C هي مركز انحناء سطح الكامة عند نقطة التلامس ، و النقطة D هي مركز انحناء سطح التابع عند نقطة التلامس.

الحل: يجب التمييز بين النقطة P_2 التي هي جزء من الكامة وبين النقطة P_4 التي هي جزء من التابع ، فالنقطتان منطبقتان في اللحظة المبينة بالشكل وأعطيتا الرمز P ، ولكن سرعتهما مختلفتان عن بعضهما مقدارا واتجاها. وبعد مرور فترة زمنية قصيرة، تتحرك P_2 مع الكامة بينما تتحرك P_4 مع التابع 4 وتنفصل النقطتان عن بعضهما.

$O_2O_4 = 29.5$ cm
$O_2C = 8.5$ cm
$CP = 17.5$ cm
$DP = 25$ cm
$O_4D = 28$ cm
Angle $O_4O_2C=155^o$

شكل 18–8

ويمكن حساب المسافة O_2P_2 من مبادئ الهندسة المستوية أو قياسها من رسم دقيق للآلية فنجد أنها 15.14 cm (ونرمز لها R_{P_2}) وكذلك المسافة O_4P_4 فنجد أنها 26.59 cm (ونرمز لها R_{P_4}) ، ومنها:

$$V_{P_2} = \omega_2 \, R_{P_2} = (30)\,(15.14) = 454.2 \text{ cm/s}$$

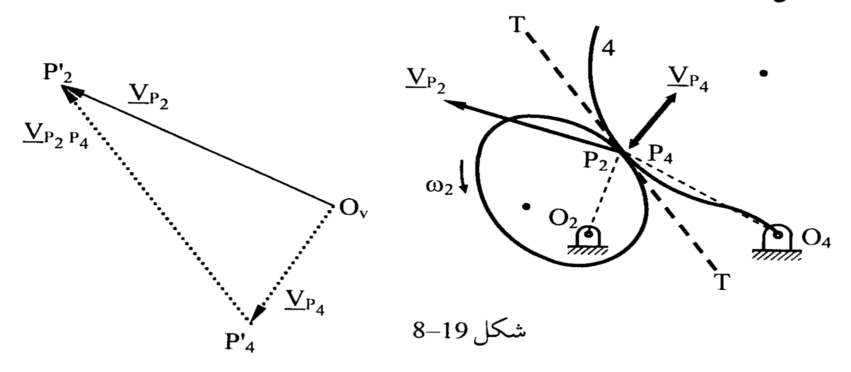
وهي عمودية على الذراع O_2P_2 كما هو موضح في شكل 19–8 . والآن ننسب سرعة النقطة P_4 إلى P_2 وذلك بملاحظة أن فرق السرعتين (أي السرعة النسبية) $\underline{V}_{P_2P_4}$ بين نقطتي التلامس يجب أن يكون في اتجاه المماس المشترك للجسمين عند موضع التلامس، أي في اتجاه الخط TT ، ومقدارها غير معلوم. وباستخدام معادلة السرعة النسبية (10–8) يكون:

$$\overset{0\,\surd}{\underline{V}_{P_2P_4}} = \overset{\surd\,\surd}{\underline{V}_{P_2}} - \overset{0\,\surd}{\underline{V}_{P_4}}$$

حيث $\underline{V}_{P_4}$ السرعة المطلقة للنقطة P_4 وهي عمودية على الخط O_4P_4 ومقدارها غير معلوم. ولحل هذه المعادلة نرسم مضلع السرعة المبين في شكل 19–8:

* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 454.2 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_{P_2}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة P'_2 .

* من O_v نرسم خطا عموديا على O_4P_4 (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{P_4}$) يظهر في الشكل متقطعا لأنه مجهول الطول.



شكل 19-8

* من P'_2 نرسم خطا متقطعا موازيا للخط TT (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{P_2P_4}$) ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة P'_4 .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_{P_4}$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى P'_4 مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{P_2P_4}$ (وهو يساوي الطول من P'_4 إلى P'_2 مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

$$V_{P_4} = 242.1 \text{ cm/s}$$
$$V_{P_2P_4} = 496.9 \text{ cm/s}$$

ومن المعادلة (9-8)

$$\omega_4 = V_{P_4} / R_{P_4} = (242.1)/(26.59) = 9.11 \text{ rad/s}$$

واتجاه ω_4 هو عكس اتجاه عقرب الساعة.

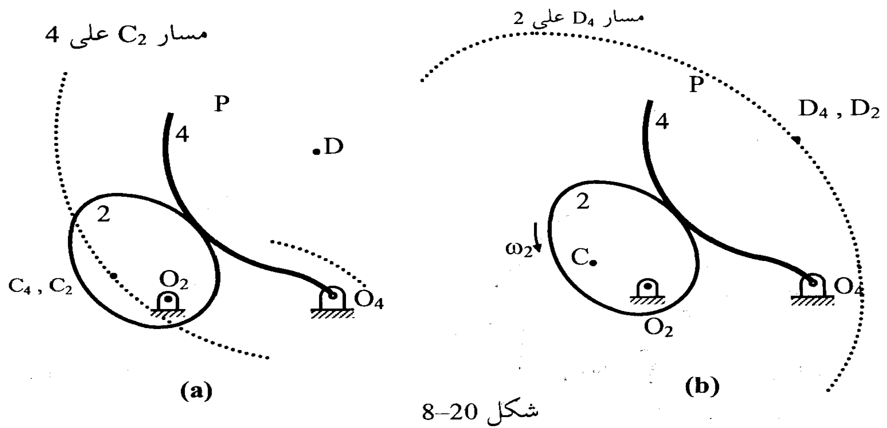
حل آخر

الحل السابق اعتمد على استعمال حقيقة أن فرق السرعتين (أي السرعة النسبية) $\underline{V}_{P_2P_4}$ بين نقطتي التلامس يجب أن يكون في اتجاه المماس المشترك للجسمين ، وهذه

الطريقة سهلة نسبيا عند تحليل السرعة ولكنها لا تنطبق على فرق العجلتين (أي العجلة النسبية) $\underline{A}_{P_2 P_4}$ بين نقطتي التلامس حيث إن اتجاهها عموما ليس في اتجاه المماس المشترك للجسمين كما هو مبين بالتفصيل في الفصل التاسع ، وعلى هذا يلزم استعمال طريقة العجلة الظاهرية والتي تعتمد على دراسة حركة نقطتين منطبقتين لحظيا مع معرفة مسار إحدى النقطتين على الضلع الذي يحتوي النقطة الأخرى. وشكل 8-20(a) يبين نقطتين منطبقتين لحظيا هما C_2 و C_4 حيث C_2 هي مركز تقوس الكامة وهي جزء ثابت فيها ويتحرك معها أما C_4 فهي جزء من التابع 4 وهي جزء ثابت فيه ويتحرك معه فيكون مسار C_2 كما يظهر لملاحظ ثابت مع التابع ويتحرك معه هو شكل مشابه تماما للسطح المقوس للتابع وموازي له ، ولذلك يمكننا أن ننسب سرعة النقطة C_2 إلى C_4 .بمعادلة الحركة الظاهرية وهي:

$$\overset{0\ \surd}{\underline{V}_{C2/4}} = \overset{\surd\ \surd}{\underline{V}_{C2}} - \overset{0\ \surd}{\underline{V}_{C4}}$$

حيث $\underline{V}_{C_2}$ هي السرعة المطلقة للنقطة C_2 وهي معلومة مقدارا واتجاها ، $\underline{V}_{C_4}$ هي السرعة المطلقة للنقطة C_4 وهي عمودية على الخط O_4C_4 ومقدارها مجهول ، أما $\underline{V}_{C_2/4}$ فهي السرعة الظاهرية وهي سرعة C_2 كما تظهر بالنسبة للضلع 4 وهي مماسة لمسار C_2 على الضلع 4 .



شكل 8-20

وهناك نقطتان أخرتان منطبقتان لحظيا ومعلوم مسار إحداهما على الضلع الذي

يحتوي النقطة الأخرى فشكل 8–20(b) يبين نقطتين منطبقتين لحظيا هما D_2 و D_4 حيث D_4 هي مركز تقوس التابع 4 وهي جزء ثابت فيه ويتحرك معه ، أما D_2 فهي نقطة على الكامة وهي جزء ثابت فيها ويتحرك معها فيكون مسار D_4 كما يظهر لملاحظ ثابت مع الكامة ويتحرك معها هو شكل مشابه تماما لسطح الكامة وموازي له، ولذلك يمكننا أن ننسب سرعة النقطة D_4 إلى D_2 .بمعادلة الحركة الظاهرية وهي:

$$\overset{0\,\surd}{\underline{V}_{D_{4/2}}} = \overset{\surd\,\surd}{\underline{V}_{D_4}} - \overset{0\,\surd}{\underline{V}_{D_2}}$$

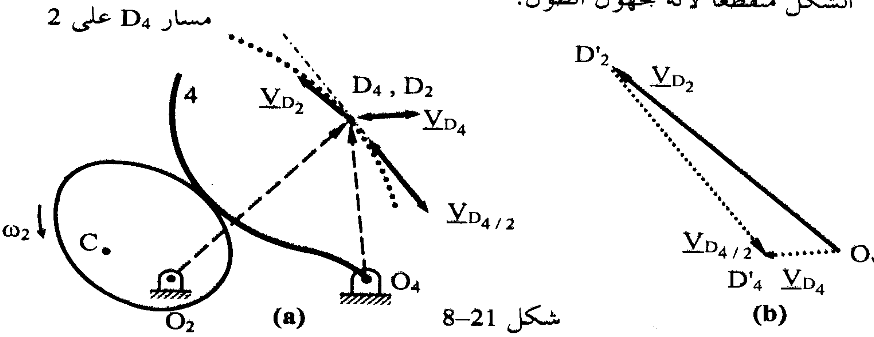
حيث $\underline{V}_{D_2}$ هي السرعة المطلقة للنقطة D_2 وهي معلومة مقدارا واتجاها ، $\underline{V}_{D_4}$ هي السرعة المطلقة للنقطة D_4 وهي عمودية على الخط O_4D_4 كما هو موضح في شكل 8–21(a) ومقدارها مجهول ، أما $\underline{V}_{D_{4/2}}$ فهي السرعة الظاهرية وهي سرعة D_4 كما تظهر بالنسبة للضلع 2 وهي مماسة لمسار D_4 على الضلع 2 . ولحل هذه المعادلة نرسم مضلع السرعة المبين في شكل 8–21(b) بعد حساب $\underline{V}_{D_2}$:

$$V_{D_2} = \omega_2 \, R_{D_2 O_2} = (30)(38.94) = 1168 \text{ cm/s}$$

حيث طول الذراع $R_{D_2O_2}$ (وهو يساوي 38.94 cm) يمكن قياسه من رسم دقيق للآلية في اللحظة المبينة بالشكل ، أو يمكن حسابه من مبادئ الهندسة المستوية.

* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 1168 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_{D_2}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة D'_2 .

* من O_v نرسم خطا عموديا على O_4D_4 (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{D_4}$) يظهر في الشكل متقطعا لأنه مجهول الطول.



شكل 8–21

*من D'_2 نرسم خطا متقطعا موازيا لمسار D_4 على 2 (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{D4/2}$) ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة D'_4 .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_{D4}$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى D'_4 مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{D4/2}$ (وهو يساوي الطول من D'_2 إلى D'_4 مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

$V_{D_4} = 255 \text{ cm/s}$

$V_{D_{4/2}} = 1000 \text{ cm/s}$

ومن المعادلة (8–9)

$\omega_4 = V_{D_4} / R_{D_4 O_4} = (255)/(28) = 9.11 \text{ rad/s}$

واتجاه ω_4 هو عكس اتجاه عقرب الساعة ، حيث طول الذراع $R_{D_4O_4}$ (وهو يساوي 28 cm) يمكن قياسه من رسم دقيق للآلية في اللحظة المبينة بالشكل ، أو يمكن حسابه من مبادئ الهندسة المستوية.

ملحوظة: يمكن أيضا حل هذه الآلية باستعمال الآلية الرباعية المكافئة O_2CDO_4 بيانيا برسم مضلع السرعة ، أو تحليليا كما يوضح ذلك مثال 4–6 .

8–5 حالات التدحرج Pure rolling

في حالات التدحرج المحض لضلع على ضلع آخر يكون فرق السرعتين (أي السرعة النسبية) بين نقطتي التلامس صفرا ، أي أن السرعة المطلقة للنقطتين متساوية بعكس الحركة الانزلاقية التي يوجد فيها فرق بين سرعتي نقطتي التلامس.

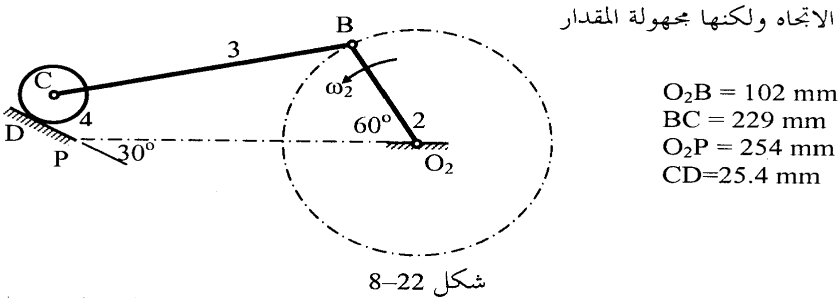
مثال 8–10

يدور الذراع O_2B المبين في شكل 8–22 بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$ عكس عقرب الساعة فتتدحرج العجلة الدائرية 4 على المستوى المائل بدون انزلاق. احسب سرعة النقطة C وكذلك السرعة الزاوية لكل من الذراع 3 والعجلة 4.

الحل: نبدأ بإيجاد سرعة الوصلة B لأن سرعة ذراع الدوران O_2B معلومة:

$V_B = \omega_2 R_{BO_2} = (5)(102) = 510 \text{ mm/s}$

وهي عمودية على ذراع الدوران O_2B كما هو موضح في شكل 8-23(a) .
والآن ننسب سرعة الوصلة C إلى B سرعة الوصلة مع ملاحظة أن مسار النقطة C ، وهي مركز العجلة ، هو خط مواز للمستوى DP وبذلك تكون السرعة $\underline{V}_C$ معلومة الاتجاه ولكنها مجهولة المقدار

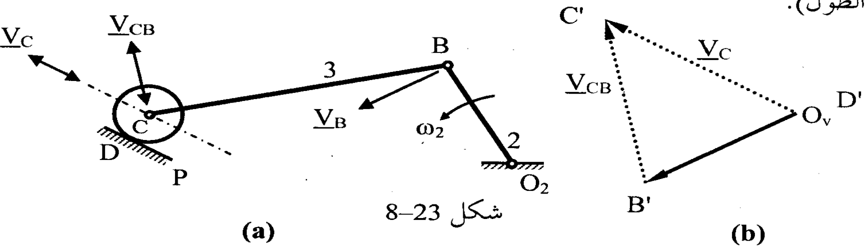


شكل 8-22

$$\overset{0\surd}{\underline{V}_{CB}} = \overset{0\surd}{\underline{V}_C} - \overset{\surd\surd}{\underline{V}_B}$$

حيث اتجاه السرعة النسبية $\underline{V}_{CB}$ عمودي على الضلع BC كما هو موضح في شكل 8-23(a) . ولحل هذه المعادلة نرسم مضلع السرعة المبين في شكل 8-23(b):

* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 510 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_B$ وبذلك نكون قد عينا النقطة 'B ، ومن نقطة الأصل نرسم أيضا خطا موازيا للسرعة $\underline{V}_C$ (يظهر في الشكل متقطعا لأنه مجهول الطول).



شكل 8-23
(a) (b)

* من 'B نرسم خطا متقطعا عموديا على الضلع BC (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{CB}$) ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة 'C .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_C$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى 'C مضروبا في

مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{CB}$ (وهو يساوي الطول من 'B إلى 'C مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

$V_C = 650$ mm/s

$V_{CB} = 590$ mm/s

ويكون اتجاه $\underline{V}_C$ إلى اليسار (مواز للمستوى DP)كما يظهر من مضلع السرعة. ويحسب مقدار ω_3 من العلاقة:

$$\omega_3 = V_{CB} / R_{CB} = (590) / (229) = 2.58 \text{ rad/s}$$

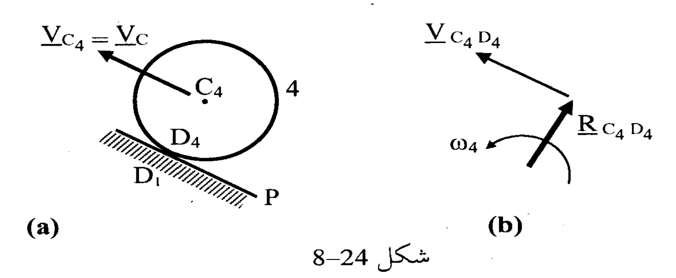
أما اتجاه ω_3 فهو في اتجاه عقرب الساعة.

ولإيجاد سرعة دوران العجلة 4 نلاحظ أنها تتلامس مع المستوى DP عند النقطة D وهي في الواقع تمثل نقطتين منطبقتين في اللحظة المبينة هما D_4 التي هي جزء من العجلة و D_1 والتي هي جزء من المستوى كما هو موضح في شكل (a)24–8. ولأن سرعة D_1 تساوي صفرا فكذلك تكون سرعة D_4 تساوي صفرا وذلك بسبب دحرجة العجلة على المستوى بدون انزلاق. والآن ننسب سرعة النقطة C_4 (وهي مركز العجلة 4) إلى D_4 باستخدام معادلة السرعة النسبية (10–8) فيكون:

$$\overset{\circ\circ}{\underline{V}_{C_4D_4}} = \overset{\surd\surd}{\underline{V}_{C_4}} - \overset{\surd\surd}{\underline{V}_{D_4}} = \overset{\surd\surd}{\underline{V}_{C_4}} = \overset{\surd\surd}{\underline{V}_C}$$

ومن المعادلة (9–8)

$$\omega_4 = V_{C_4D_4} / R_{C_4D_4} = (650) / (25.4) = 25.59 \text{ rad/s}$$



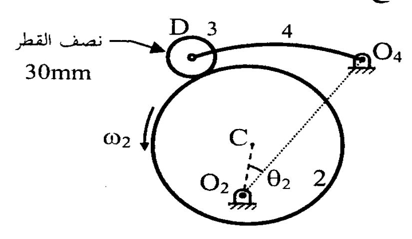
شكل 24–8

واتجاه ω_4 هو عكس اتجاه عقرب الساعة وذلك بملاحظة أن فرق السرعتين (أي

السرعة النسبية) $\underline{V}_{C_4 D_4}$ تميل لإدارة الذراع $\underline{R}_{C_4 D_4}$ عكس اتجاه عقرب الساعة كما هو موضح في شكل 8–24(b).

مثال 11–8

شكل 25–8 يوضح الكامة الدائرية 2 التي نصف قطرها 100 mm والتابع المقوس 4 ذو العجلة roller follower . إذا كانت الكامة تدور بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 10$ rad/s ، احسب السرعة الزاوية للضلع 4.



$O_4D = 187$ mm
$O_2O_4 = 224$ mm
$O_2C = 70$ mm
$\theta_2 = 28^\circ$

شكل 25–8

الحل: عند دوران الكامة 2 تتحرك عجلة التابع roller وهي الضلع 3 بحيث تلامس سطح الكامة 2 في كل الأوقات ولذلك فإن الحركة الظاهرية لمركز عجلة التابع D_3 على الكامة 2 هو قوس دائري موازي للكامة ومركزه هو النقطة C ، أي أننا ندرس نقطتين منطبقتين لحظيا هما D_2 و D_4 (وكلتا النقطتان تظهر في الشكل برمز واحد هو D) حيث D_2 هي جزء ثابت في الكامة ويتحرك معها أما D_4 فهي جزء من التابع 4 وهي جزء ثابت فيه ويتحرك معه (وهي في نفس الوقت منطبقة في كل الأوقات مع النقطة D_3 التي هي مركز عجلة التابع) وتكون السرعة الظاهرية $\underline{V}_{D_{4/2}}$ مماسة للمسار . ويمكننا أن ننسب سرعة النقطة D_4 إلى D_2 .بمعادلة الحركة الظاهرية وهي:

$$\overset{0\surd}{\underline{V}_{D4/2}} = \overset{0\surd}{\underline{V}_{D4}} - \overset{\surd\surd}{\underline{V}_{D2}}$$

حيث $\underline{V}_{D_2}$ هي السرعة المطلقة للنقطة D_2 وهي معلومة مقدارا واتجاها ، $\underline{V}_{D_4}$ هي السرعة المطلقة للنقطة D_4 وهي عمودية على الخط O_4D_4 كما هو موضح في

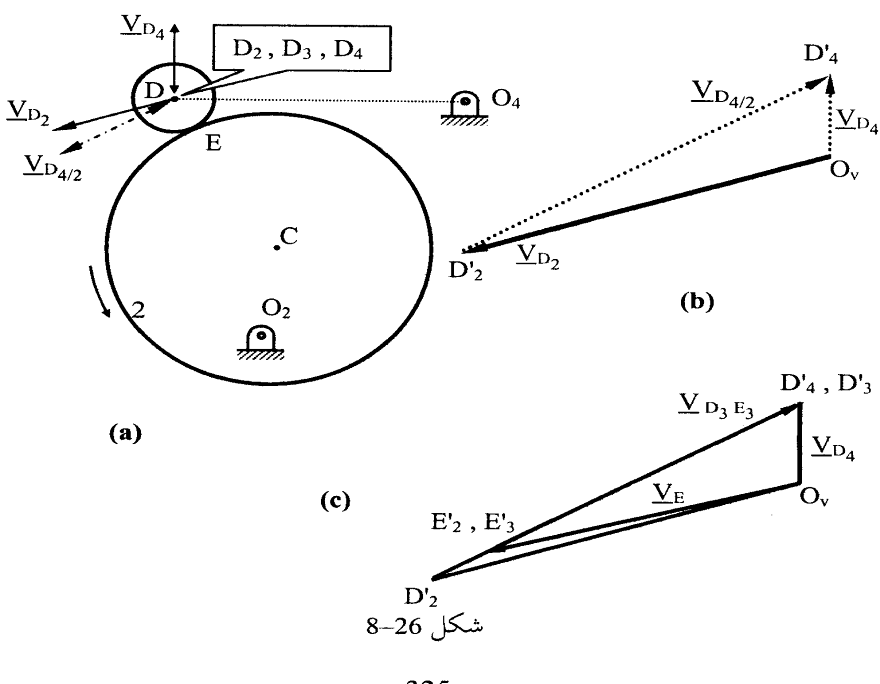
شكل 26(a)–8 ومقدارها مجهول ، أما $\underline{V}_{D_{4/2}}$ فهي السرعة الظاهرية وهي سرعة D_4 كما تظهر بالنسبة للضلع 2 وهي مماسة لمسار D_4 على الضلع 2 ، أي مماسة لدائرة مركزها C ونصف قطرها هو $C\,D_4$ ولذلك تكون $\underline{V}_{D_{4/2}}$ عمودية على الخط CD .

وتحسب $\underline{V}_{D_2}$ من العلاقة:

$$V_{D_2} = \omega_2 R_{D_2O_2} = (10)(190) = 1900 \text{ mm/s}$$

وهي عمودية على الخط O_2D_2 (وهو المتجه $\underline{R}_{D_2O_2}$)كما هو موضح في شكل 26(a)–8 ، حيث الطول $R_{D_2O_2} = 190$ mm يمكن قياسه من رسم دقيق للآلية أو حسابه من هندسة الشكل.

ولرسم مضلع السرعة ، شكل 26(b)–8:



شكل 26–8

* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 1900 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_{D_2}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة D'_2 ، ومن نقطة الأصل نرسم أيضا خطا موازيا للسرعة $\underline{V}_{D_4}$ (يظهر في الشكل متقطعا لأنه مجهول الطول).

* من D'_2 نرسم خطا متقطعا موازيا للسرعة $\underline{V}_{D_{4/2}}$ ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة D'_4 .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_{D_4}$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى D'_4 مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{D_{4/2}}$ (وهو يساوي الطول من D'_2 إلى D'_4 مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

V_{D_4}= 490 mm/s, $V_{D_{4/2}}$= 2080 mm/s

ويحسب مقدار ω_4 من العلاقة:

$\omega_4 = V_{D_4} / R_{D_4O_4} = 490/187 = 2.62$ rad/s CW

أما اتجاه ω_4 فهو في اتجاه عقرب الساعة CW.

ملحوظة: الحل الذي تم الحصول عليه فيما سبق صحيح سواء كانت العجلة roller follower (الضلع 3) في المثال السابق تتدحرج مع الانزلاق أو بدون انزلاق على الكامة الدائرية 2 .

ملحوظة أخري: يمكن أيضا حل هذه الآلية بيانيا أو تحليليا باستعمال الآلية الرباعية المكافئة ، وفي هذه الحالة تكون الوصلات الأربع للآلية هي O_2 , O_4 , D, C .

مثال 12–8

إذا كانت العجلة roller follower (الضلع 3) في المثال السابق تتدحرج بدون انزلاق على الكامة الدائرية 2 ، احسب السرعة الزاوية للعجلة 3.

الحل: لإيجاد سرعة دوران العجلة 3 نلاحظ أنها تتلامس مع الكامة 2 عند النقطة E كما هو موضح في شكل (a)26–8 ، وهذه النقطة في الواقع تمثل نقطتين منطبقتين في اللحظة المبينة هما E_3 التي هي جزء من العجلة و E_2 والتي هي جزء من الكامة (وكلتا النقطتان تظهر في الشكل برمز واحد هو E). وسرعتا هاتين النقطتين متساويتان لأن العجلة 3 تتدحرج بدون انزلاق على الكامة.

ويبدأ الحل بتعيين سرعة النقطة E_2 :

$V_{E_2} = \omega_2 R_{EO_2} = (10)(161) = 1610 \text{ mm/s}$

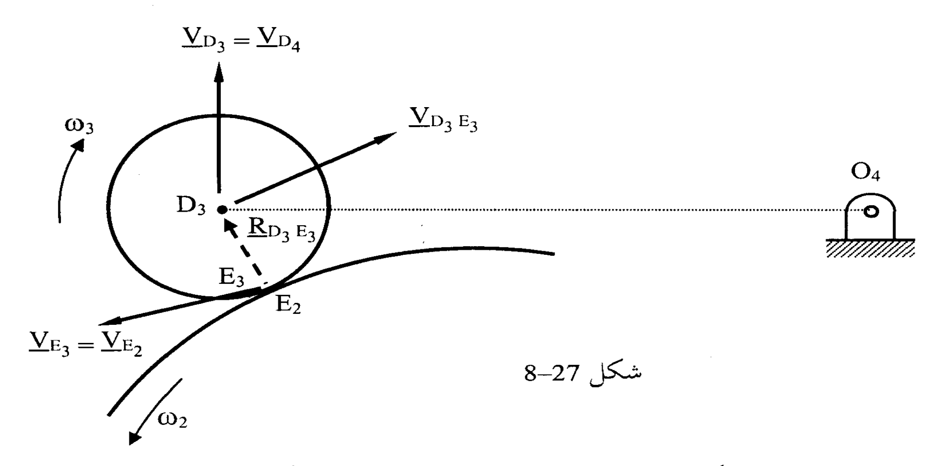
وهي عمودية على الخط EO_2 ، وطول هذا الخط يساوي 161 mm ويمكن قياسه من رسم دقيق للآلية أو حسابه من هندسة الشكل. ويرسم المتجه $\underline{V}_{E_2}$ من نقطة الأصل O_v حيث منها نرسم سهما طوله 1610 (بمقياس الرسم) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_{E_2}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة E'_2 كما هو موضح في شكل 8–26(c) ، والنقطة E'_3 تكون منطبقة علي E'_2 لأن السرعة المطلقة لكل من النقطتين متساوية بسبب تدحرج العجلة (الضلع 3) بدون انزلاق على الكامة الدائرية 2 .

نقيس من الرسم مقدار $V_{D_3 E_3}$ (وهو يساوي الطول من E'_3 إلى D'_3 مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

$V_{D_3 E_3} = 1810 \text{ mm/s}$

والمتجه $\underline{V}_{D_3 E_3}$ هو سرعة النقطة D_3 التي هي مركز العجلة (الضلع 3) بالنسبة للنقطة E_3 ، ويوضح شكل 27–8 هذا المتجه والمتجهات الأخرى ذات الصلة . ويحسب مقدار ω_3 من العلاقة:

$\omega_3 = V_{D_3 E_3} / R_{D_3 E_3} = 1810/30 = 60.3 \text{ rad/s CW}$



شكل 27–8

واتجاه ω_3 يكون مع اتجاه عقرب الساعة CW وذلك لأن السرعة النسبية $\underline{V}_{D_3}$

E_3 تميل لإدارة الذراع $\underline{R}_{D_3 E_3}$ مع اتجاه عقرب الساعة كما هو موضح في شكـــل 8-27 .

خاتمة الفصل الثامن

عرض هذا الفصل خواص السرعة النسبية بين نقطتين على جسم جامد (متماسك) على أنها الفرق الاتجاهي بين سرعتي هاتين النقطتين ، وبين أن اتجاه هذه السرعة النسبية يكون دائما عموديا على الخط الواصل بين هاتين النقطتين ، وهذه الخاصية مفيدة جداً في تحليل السرعة في الآليات كما وضحت الأمثلة العديدة ذلك. ثم تطرق الموضوع إلى حالات انزلاق أضلاع الآلية على بعضها وبين أن السرعة النسبية بين نقطتي تلامس ضلعين مع بعضهما تكون في اتجاه المماس المشترك بين الضلعين عند نقطتي التلامس ، وبينت المناقشة أنه في حال تدحرج ضلع على آخر بدون انزلاق فإن السرعة النسبية بين نقطتي تلامس الضلعين تكون صفرا ، أي أن السرعة المطلقة لنقطتي التلامس يجب أن تكون متساوية مقدارا واتجاها. ثم عرض الموضوع للحركة الظاهرية في حالة تحرك ضلعين على بعضهما وأكد على أهمية تحديد مسار نقطة من أحد الضلعين على الضلع الآخر حيث تكون السرعة الظاهرية لهذه النقطة مماسة للمسار. وقد تم حل الأمثلة بيانيا برسم مضلع السرعة وتبين وجود صورة لكل ضلع من أضلاع الآلية في مضلع السرعة حيث تكون الصورة مشابهة هندسيا للضلع الأصلي ولكنها متعامدة عليه وفي اتجاه السرعة الزاوية لهذا الضلع ، وقد وضحت الأمثلة أن استخدام صور الأضلاع في مضلع السرعة يسهل إيجاد سرعات النقاط المختلفة على هذه الأضلاع ولابد من الإشارة هنا أنه قد جرت العادة في كثير من المراجع على حل معادلات السرعة النسبية بيانيا على أنه يمكن أيضاً حل المعادلات تحليلياً باستخدام العلاقات الهندسية بين المتجهات كما بين ذلك مثال 6-8.

الفصل التاسع

تحليل العجلات بطريقة العجلة النسبية

Acceleration Analysis Using Relative Accelerations

ناقش الفصل السابق طريقة تحليل السرعة في الآليات باستخدام السرعة النسبية وفي هذا الفصل نناقش كيفية تطبيق طريقة مشابهة لتحليل العجلة ، وهي تعتمد على إيجاد العجلة النسبية بين الوصلات في الآلية ثم حل المعادلات الاتجاهية الناتجة. وفي الكثير من المراجع تكون هذه الطريقة من أوائل الطرق التي تطرح مع التركيز على حل المعادلات الاتجاهية بيانيا (بالرسم) ، إلا أن انتشار الكمبيوتر يجعل الطرق التحليلية والعددية أكثر جاذبية لأنها تعطي دقة أعلى وكذلك لأن المعادلات أو برامج الكمبيوتر عادة ما تعطي تحليلا للحركة في جميع أوضاع الآلية بينما يقتصر الحل البياني على موضع واحد للآلية. إلا أن الطرق البيانية لها ميزة الإدراك الأعمق للآلية وحركة أضلاعها بالنسبة لبعضها. وتجدر الإشارة إلى أنه في طريقة العجلة النسبية يمكن أيضا حل المعادلات الاتجاهية تحليليا وبذلك نحصل على دقة عالية للحل مع تحليل كامل للحركة وإن كانت معظم المراجع تعتمد الحل البياني فقط.

وترجع أهمية تحليل العجلة في الآليات إلى أن القوى المتولدة أثناء الحركة في أضلاع الآلية inertia forces تعتمد (من قانون نيوتن) على كتلة الأضلاع وعجلاتها ، وهذه القوى تؤثر على الإجهادات في الأضلاع وكذلك على الاهتزازات والضوضاء الناتجة من الحركة. وفيما يلي نناقش طريقة العجلة النسبية بمثال مبسط أولا ثم نطبق الطريقة على أمثلة عديدة.

9–1 مضلع العجلة Acceleration polygon

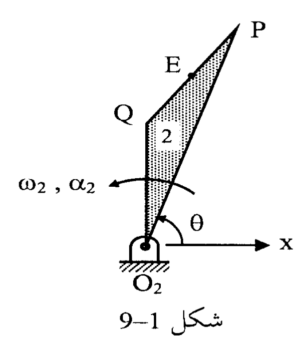
مثال 1–9

الذراع المثلث المبين في شكل 1–9 أبعاده 187.94 mm , 100 , 100 ويدور بسرعة زاوية $\omega_2 = 2$ rad/s وعجلة زاوية $\alpha_2 = 3$ rad/s^2 . ارسم مضلع العجلة ومنه عين عجلة النقطة E في منتصف المسافة بين P , Q علما بأن $\theta = 70^\circ$.

الحل:

يدور هذا الضلع المتماسك كوحدة واحدة rigid body حول المحور الثابت O_2 ولذلك فإن عجلة أي نقطة عليه ، مثل النقطة P ، تتكون من مركبتين هما المركبة المركزية (العمودية) والمركبة المماسة (نسترجع من الباب الأول أن المركبة العمودية سميت كذلك لأنها عمودية على مسار النقطة P وهو دائرة مركزها O_2 ، وأن المركبة المماسة سميت كذلك لأنها مماسة لمسار النقطة P ، ولذلك تكون الأولى عكس اتجاه المتجه $\underline{R}_P$ الذي يمثل موضع النقطة P والثانية عمودية عليه) ، أي أن:

$$\underline{A}_P = \underline{A}_P^n + \underline{A}_P^t \tag{9-1}$$



شكل 1–9

حيث $\underline{A}_P$ هي عجلة النقطة P ، أما المركبة المركزية $\underline{A}_P^n$ فإن خط عملها هو نفسه خط عمل $\underline{R}_P$ المبين في شكل (a) 2–9 ، ومقدارها هو:

$$\underline{A}_P^n = -\omega_2^2 \times \underline{R}_P \tag{9-2}$$

$$A_P^n = 2^2\,(187.94) = 751.76 \text{ mm/s}^2$$

والإشارة السالبة في المعادلة (2–9) تعني أن $\underline{A}_P^n$ تكون دائما عكس اتجاه $\underline{R}_P$.

أما المركبة المماسة $\underline{A}_P^t$ فاتجاهها عمودي على $\underline{R}_P$ كما هو مبين في شكل (a) 2–9 ، ويعتمد اتجاهها يمينا أو يسارا على اتجاه α_2 (في المثال الحالي تكون إلى اليسار) ، ومقدارها هو:

$$\underline{A}_P^t = \underline{\alpha}_2 \times \underline{R}_P \tag{9-3}$$

$$A_P^t = 3\,(187.94) = 563.82 \text{ mm/s}^2$$

واتجاه $\underline{A}^t_P$ عمودي على $\underline{R}_P$ ناحية اليسار لأن $\underline{\alpha}_2$ تميل لإدارة المتجه $\underline{R}_P$ عكس عقرب الساعة . وبالمثل نوجد مركبتي عجلة النقطة Q :

$$\underline{A}^n_Q = -\omega_2^2 \times \underline{R}_Q$$

$$A^n_Q = 2^2\,(100) = 400 \text{ mm/s}^2$$

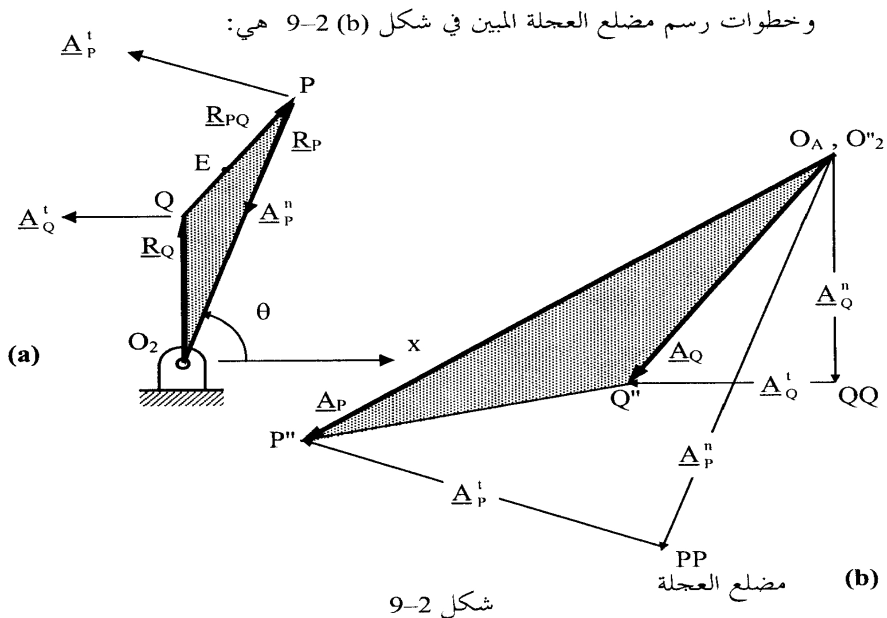
وهي عكس اتجاه $\underline{R}_Q$. أما المركبة المماسة فهي:

$$\underline{A}^t_Q = \underline{\alpha}_2 \times \underline{R}_Q$$

$$A^t_Q = (3)(100) = 300 \text{ mm/s}^2$$

واتجاه هذه المركبة عمودي على $\underline{R}_Q$ ناحية اليسار كما هو مبين في شكل 9–2(a).

وخطوات رسم مضلع العجلة المبين في شكل (b) 2–9 هي:



شكل 2–9

* نختار نقطة أصل مناسبة O_A ومنها نرسم سهما طوله 400 (بمقياس رسم مناسب) ليمثل $\underline{A}^n_Q$ موازيا للمتجه $\underline{R}_Q$ ولكن عكس اتجاهه وبذلك نكون قد عينا

النقطة QQ ، ومنها نرسم سهما طوله 300 (بنفس مقياس الرسم) ليمثل $\underline{A}'_Q$ عموديا على المتجه $\underline{R}_Q$ ، وبذلك نكون قد عينـــا النقطة Q'' وعليه فإن السهم من O_A إلى Q'' يمثل العجلة $\underline{A}_Q$ مقدارا واتجاها. ونلاحظ أن اتجاه $\underline{A}'_Q$ يكون ناحية اليسار لأن $\underline{\alpha}_2$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_Q$ حول نقطة الدوران O_2 في عكس اتجاه دوران عقرب الساعة. والعجلة $\underline{A}_Q$ تسمى العجلة المطلقة للنقطة Q وهي العجلة التي يراها شخص ثابت مع القاعدة ويلاحظ حركة الآلية.

* من نقطة الأصل O_A نرسم سهما طوله 751.76 (بنفس مقياس الرسم) ليمثل $\underline{A}''_P$ موازيا للمتجه $\underline{R}_P$ ولكن عكس اتجاهه وبذلك نكون قد عينا النقطة PP ، ومنها نرسم سهما طوله 563.82 (بنفس مقياس الرسم) ليمثل $\underline{A}'_P$ عموديا على المتجه $\underline{R}_P$ ، وبذلك نكون قد عينا النقطة P'' وعليه فإن السهم من O_A إلى P'' يمثل العجلة المطلقة $\underline{A}_P$ مقدارا واتجاها.

* مضلع العجلة هو $O_A\, P''\, Q''$ ومنه بالقياس نجد أن مقدار العجلة A_P يساوي $940\ mm/s^2$ وأن مقدار العجلة A_Q يساوي $500\ mm/s^2$.

* من مضلع العجلة نلاحظ أن المثلث $O_A\, P''\, Q''$ هو صورة للضلع الأصلي O_2 $P\, Q$ وهو يسمى صورة العجلة للضلع acceleration image أو صورة الجسم في مضلع العجلة ، وهذه الخاصية مفيدة في كثير من التطبيقات العملية. وأهم خصائص صورة الجسم في مضلع العجلة هي أن الصورة متشابهة هندسيا مع الأصل أي أن الزوايا في كل من الأصل والصورة متساوية ، والأضلاع متناسبة بمعنى أن:

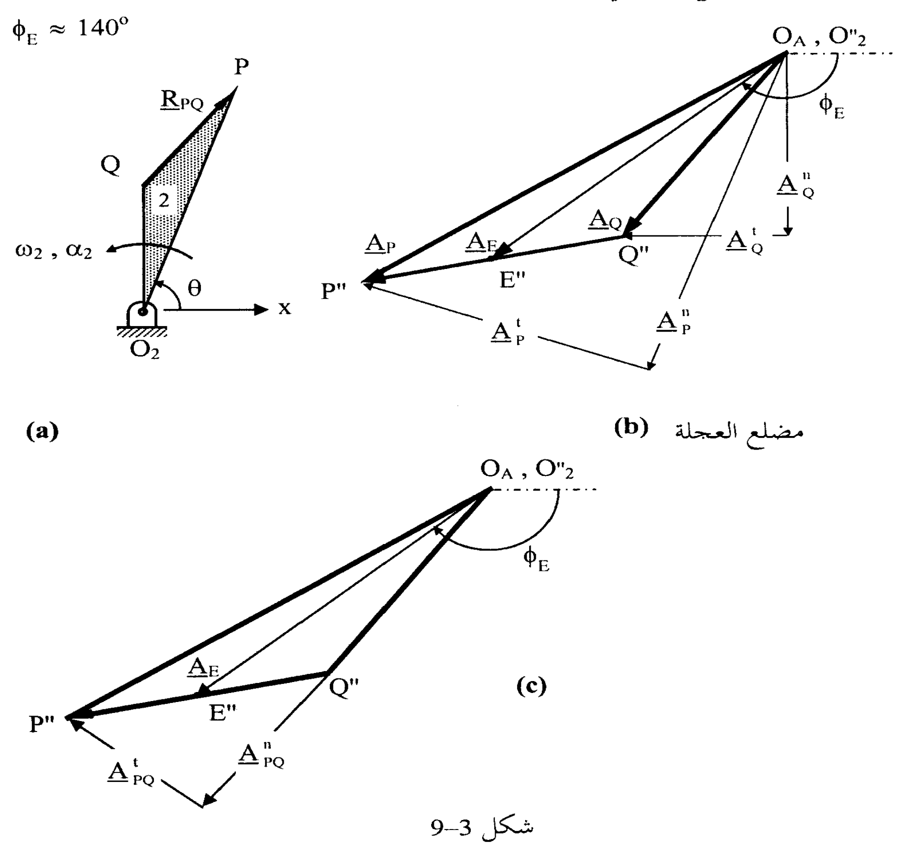
$$\frac{P''Q''}{PQ} = \frac{O''_2\, P''}{O_2 P} = \frac{O''_2\, Q''}{O_2 Q}$$

*صورة الجسم في مضلع العجلة لا تكون متعامدة على الجسم الأصلي كما هو الحال في مضلع السرعة وإنما تكون على زاوية تعتمد على كل من α_2 , ω_2 .

وخاصية تناسب الأضلاع تساعدنا في إيجاد العجلة $\underline{A}_E$ من ملاحظة أن النقطة E تقع في منتصف الطول PQ وعلى هذا فإن صورة هذه النقطة في مضلع العجلة (وهي E'') تقع في منتصف الطول $P''\, Q''$ وبذلك نعين النقطة E'' . وعليه فإن السهم من

O_A إلى "E يمثل العجلة المطلقة $\underline{A}_E$ مقدارا واتجاها. وبالقياس من مضلع العجلة المبين في شكل 9–3 نجد أن مقدار العجلة A_E يساوي $710\ mm/s^2$ ، واتجاهها يتحدد بالزاوية ϕ_E ، وهي بالقياس:

$$\phi_E \approx 140^o$$



شكل 9–3

9.2 العجلة النسبية بين نقطتين

العجلة النسبية بين Q , P (انظر شكل (9–3(b)) هي فرق العجلتين (باستعمال المتجهات وليس مجرد الفرق بين المقدارين) ويرمز لها بالرمز $\underline{A}_{PQ}$ حيث:

$$\overset{oo}{\underline{A}}_{PQ} = \overset{\sqrt{}\sqrt{}}{\underline{A}}_{P} - \overset{\sqrt{}\sqrt{}}{\underline{A}}_{Q} \qquad (9\text{–}4)$$

وكل متجه في هذه المعادلة له مقدار واتجاه ، ومن المفيد عند كتابة مثل هذه المعادلة الاتجاهية تحديد الكميات المعلومة لكل متجه ، ولذلك استعملنا هنا فوق كل متجه الرمز (√) للدلالة على كمية معلومة ، والرمز (0) للدلالة على كمية مجهولة علما بأن الكمية الأولى من اليسار هي مقدار المتجه والثانية هي اتجاهه . وعلى ذلك تدل المعادلة (4–9) على أن المتجه $\underline{A}_{PQ}$ مجهول مقدارا واتجاها. ويمكن حل هذه المعادلة تحليليا ولكن جرت عادة الكثير من كتب نظرية الماكينات على حلها بيانيا برسم مضلع العجلة.

وفي المثال السابق يكون المتجه الواصل من "Q إلى "P في شكل 9–3(b) هو متجه العجلة النسبية $\underline{A}_{PQ}$.

والمعادلة (4–9) هي المعادلة العامة لإيجاد العجلة النسبية بين أي نقطتين في الآلية ، أما في الحالة الخاصة التي تقع فيها النقطتان Q , P على ضلع متماسك rigid link فيمكن تحليل العجلة النسبية إلى مركباتها:

$$\underline{A}_{PQ} = \underline{A}^{n}_{PQ} + \underline{A}^{t}_{PQ} \qquad (9\text{–}5)$$

حيث $\underline{A}^{n}_{PQ}$ هي المركبة المركزية وتساوي:

$$\underline{A}^{n}_{PQ} = -\,\omega^{2}_{PQ} \times \underline{R}_{PQ} \qquad (9\text{–}6)$$

$$A^{n}_{PQ} = (2)^{2}(100) = 400 \text{ mm/s}^{2}$$

وفي المعادلة (6–9)، ω_{PQ} هي السرعة الزاوية للضلع الذي يحتوي على النقطتين P , Q . والإشارة السالبة في هذه المعادلة تعني أن $\underline{A}^{n}_{PQ}$ تكون دائما عكس اتجاه $\underline{R}_{PQ}$ (أي من P إلى Q). أما المركبة المماسة $\underline{A}^{t}_{PQ}$ فاتجاهها عمودي على $\underline{R}_{PQ}$ وتساوي:

$$\underline{A}^{t}_{PQ} = \underline{\alpha}_{PQ} \times \underline{R}_{PQ} \qquad (9\text{–}7)$$

$$A^{t}_{PQ} = 3(100) = 300 \text{ mm/s}^{2}$$

حيث α_{PQ} هي العجلة الزاوية للضلع الذي يحتوي على النقطتين P و Q . والمركبتان $\underline{A}^{t}_{PQ}$ و $\underline{A}^{n}_{PQ}$ مبينتان في شكل 9–3(c) .

وعند تحليل الآليات المحتوية على عدد من الأضلاع ، عادة تكون السرعة الزاوية والعجلة الزاوية معلومتين لأحد أضلاع الآلية وغير معلومتين لباقي الأضلاع ، ولذلك يلزم أولا رسم مضلع السرعة للآلية ومنه تتعين السرعات الزاوية لباقي الأضلاع كما بين ذلك الفصل الثامن بالتفصيل. وعلى ذلك تكون السرعة الزاوية لضلع ما يحتوي على نقطتين مثل P , Q (ω_{PQ}) معلومة ، أما α_{PQ} فنحصل على قيمتها برسم مضلع العجلة.

وهناك علاقة أخري تكون أحيانا مفيدة في حساب مقدار $\underline{A}^n_{PQ}$:

$$A^n_{PQ} = \frac{V^2_{PQ}}{R_{PQ}} \qquad (9\text{–}8)$$

حيث $\underline{V}_{PQ}$ هي السرعة النسبية بين النقطتين P , Q .

9.3 ملخص خواص مضلع العجلة

من المثال السابق يمكن تلخيص أهم خواص مضلع العجلة كما يلي (انظر شكل 9–3)

* كل نقطة أو وصلة في الآلية الأصلية (مثلا Q) تمثلها نقطة في مضلع العجلة ("Q) نسميها صورة النقطة في مضلع العجلة.

* العجلة المطلقة لأي نقطة تقاس مقدارا واتجاها من نقطة الأصل O_A إلى صورة النقطة في مضلع العجلة. أما العجلة النسبية بين نقطتين مثل E و Q (ويرمز لها $\underline{A}_{QE}$) فتقاس من "E إلى "Q طبقا للمعادلة:

$\underline{A}_{QE} = \underline{A}_Q - \underline{A}_E$

* جرت العادة في حالة العجلة المطلقة أن يكتب رمز النقطة المعنية فقط ، فمثلا $\underline{A}_Q$ هي العجلة المطلقة للنقطة Q (ولا تكتب $\underline{A}_{QO_A}$). أما في حالة العجلة النسبية فلابد من كتابة رمزين لبيان النقطتين المعنيتين ، فمثلا $\underline{A}_{PQ}$ هي عجلة النقطة P نسبة إلى النقطة Q .

*كل ضلع جامد في الآلية الأصلية له صورة في مضلع العجلة وهذه الصورة للضلع في مضلع العجلة لا تكون عمودية على الجسم الأصلي –كما هو الحال في مضلع السرعة– وإنما تكون على زاوية تعتمد على كل من ω , α للضلع ، ومثال

ذلك أن "Q"E ليس عموديا على QE.

*الصورة متشابهة هندسيا مع الأصل أي أن الزوايا في كل من الأصل والصورة متساوية والأضلاع متناسبة .

* كل نقطة أو وصلة على القاعدة في الآلية الأصلية (مثلا O_2) تمثلها نقطة في مضلع العجلة تنطبق على نقطة الأصل (O_A) لأن القاعدة عجلتها صفر.

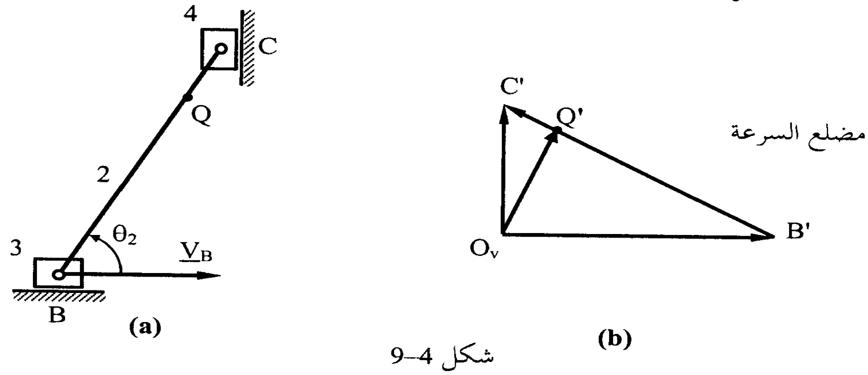
والأمثلة التالية توضح كيفية استعمال طريقة العجلة النسبية لتحليل العجلات في الآليات.

مثال 2–9

في الآلية المبينة في شكل (a)4–9 يتحرك المنـــزلق 3 إلى اليمين بسرعة منتظمة $V_B = 40$ cm/s. احسب عجلة النقطة C والعجلة الزاوية للذراع BC وكذلك عجلة النقطة Q مقدارا واتجاها عندما تكون الزاوية $\theta_2 = 60^o$ علما بأن المسافة BQ طولها 16 cm وأن طول الذراع BC هو 20 cm.

الحل:

شكل (b)4–9 يبين مضلع السرعة الذي تم الحصول عليه في مثال 2–8 ومنه عينت ω_2 وكانت قيمتها 2.3 rad/s عكس عقرب الساعة.



شكل 4–9

عجلة الوصلة B معلومة مقدارا واتجاها (تساوي صفرًا في هذا المثال لأن المنـــزلق 3 يتحرك بسرعة منتظمة) وتقع هي والوصلة C على نفس الجسم الجامد ، ولذلك

ننسب عجلة النقطة C إليها باستعمال المعادلة (4–9):

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{CB}} = \overset{\circ\surd}{\underline{A}_{C}} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{B}} \quad \text{(a)}$$

وفي هذه المعادلة ثلاثة مجاهيل هي مقدار واتجاه $\underline{A}_{CB}$ ومقدار $\underline{A}_{C}$ (وذلك لأن اتجاه $\underline{A}_{C}$ رأسي ، ويمثلها سهم ذو اتجاهين كما هو مبين في شكل 9–5(a) لأننا في هذه المرحلة لا نعلم ما إذا كان اتجاهها لأعلى أم لأسفل). وباستعمال المعادلة (5–9):

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{CB}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{CB}} + \overset{\circ\surd}{\underline{A}^{t}_{CB}} \quad \text{(b)}$$

وبدمج المعادلتين (a) , (b)

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{CB}} + \overset{\circ\surd}{\underline{A}^{t}_{CB}} = \overset{\circ\surd}{\underline{A}_{C}} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{B}} \quad \text{(c)}$$

وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{A}_{C}$ ومقدار $\underline{A}^{t}_{CB}$ (اتجاه $\underline{A}^{t}_{CB}$ عمودي على المتجه $\underline{R}_{CB}$ كما هو مبين في شكل 9–5(a) بسهم ذو اتجاهين). ولحل المعادلة (c) نرسم مضلع العجلة المبين في شكل 9–5(b) بعد حساب A^{n}_{CB} :

$$A^{n}_{CB} = \omega_2^{2}\, P_{CB} = (2.3)^{2}\,(20) = 105.8 \text{ cm/s}^{2}$$

* نختار نقطة أصل مناسبة O_A ونلاحظ أن "B منطبقة على O_A لأن عجلتها = صفر ، ومنها نرسم سهما طوله 105.8 (بمقياس رسم مناسب) ليمثل $\underline{A}^{n}_{CB}$ موازيا للمتجه $\underline{R}_{CB}$ ولكن عكس اتجاهه (كما هو مبين في الشكل) وبذلك نكون قد عينا النقطة CC ، ومنها نرسم خطا متقطعا عموديا عليه (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}^{t}_{CB}$.

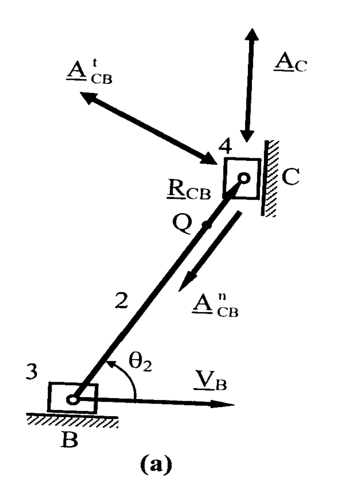
* من نقطة الأصل O_A نرسم خطا متقطعا رأسيا (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}_{C}$ ، فيتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة "C.

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{A}_{C}$ (وهو يساوي الطول من O_A إلى "C مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{A}^{t}_{CB}$ (وهو يساوي الطول من CC إلى "C مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

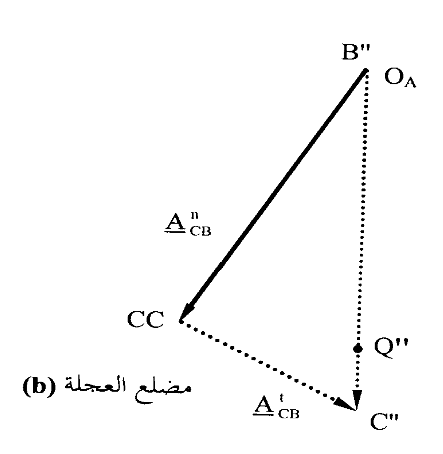
$$A_C = 123 \text{ cm/s}^{2}$$

واتجاه $\underline{A}_{C}$ لأسفل (أي في اتجاه السهم من O_A إلى "C). ونجد أيضا أن

$$A^{t}_{CB} = 62 \text{ cm/s}^{2}$$



(a)



(b) مضلع العجلة

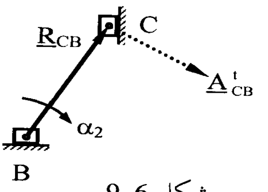
شكل 5–9

ومنها

$$\alpha_2 = A^t_{CB} / R_{CB} = 62 /20 = 3.1 \text{ rad/s}^2 \text{ CW}$$

ونلاحظ أن اتجاه $\underline{\alpha}_2$ هو في اتجاه دوران عقرب الساعة CW لأن A^t_{CB} تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{CB}$ في اتجاه عقرب الساعة كما هو مبين في شكل 6–9 .

أما النقطة "Q فيمكن تعيينها في مضلع العجلة بملاحظة أن "B"C هي صورة الضلع BC أي أن:



شكل 6–9

$$BQ / BC = B''Q'' / B''C''$$

والطول "B"C مقداره بالقياس من مضلع العجلة هو 123 cm/s^2 (وهو يساوي الطول من "B إلى "C بالسنتيمتر مضروبا في مقياس الرسم) . وبالتعويض:

$$16 / 20 = B''Q'' / 123$$

$B''Q'' = 98.4\ cm/s^2$

وبذلك نعين النقطة "Q بقياس طول مقداره 98.4 (بمقياس الرسم المستعمل في شكل 5–9) ويكون المتجه من O_A إلى "Q هو العجلة $\underline{A}_Q$ ، أي أن اتجاهها إلى أسفل ومقدارها

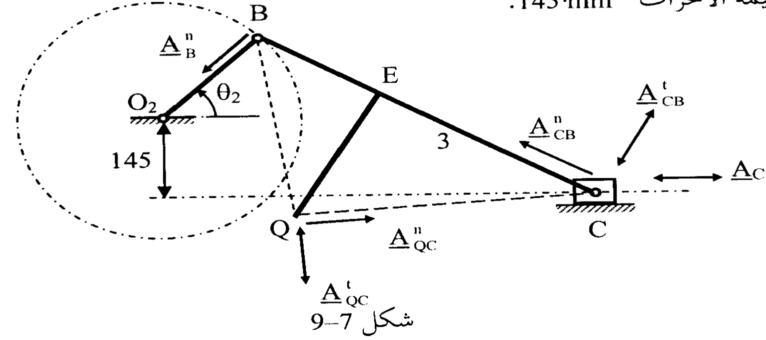
$A_Q = 98.4\ cm/s^2$

مثال 3–9

في آلية المنـــزلق المنحرف المبينة في شكل 7–9 عين مقدار واتجاه عجلة كل من المنـــزلق C والنقطة Q ، واحسب العجلة الزاوية لذراع التوصيل 3 عندما تكون $\theta_2 = 45^o$ ، علما بأن ذراع الدوران يدور عكس عقرب الساعة بسرعـــة منتظمة $\omega_2 = 100$ rev/min. الأبعاد هي:

$O_2B = 200$ mm, $BC= 570$ mm, $BE = 200$ mm , $EQ = 250$ mm

وقيمة الانحراف 145 mm.



شكل 7–9

الحل:

من مضلع السرعة الذي تم الحصول عليه في مثال 3–8 عينت ω_3 وكانت قيمتها 3 rad/s في اتجاه عقرب الساعة.

لتحليل العجلة نركز الانتباه على المفصلات hinges لأننا إذا أوجدنا عجلاتها يمكننا إيجاد عجلات النقط الأخرى بينها. ولأن سرعة وعجلة ذراع الدوران O_2B معلومتان نبدأ بإيجاد عجلة الوصلة B .

$$\overset{0\,0}{\underline{A}_B} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_B} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^t_B} \qquad (d)$$

$$\omega_2 = 100(2\pi)/(60) = 10.47 \text{ rad/s}$$

$$A^n_B = \omega^2_2\, R_{BO_2} = (10.47)^2\,(200) = 21\,932 \ \text{mm/s}^2$$

وهي تتجه من B إلى O_2 (أي عكس اتجاه $\underline{R}_{BO_2}$). ولأن السرعة الزاوية ω_2 منتظمة تكون العجلة الزاوية $\alpha_2 = 0$:

$$A^t_B = \alpha_2\ R_{BO_2} = 0$$

وعجلة الوصلة C مجهولة المقدار لكن اتجاهها أفقي وهو اتجاه حركة المنـــزلق (ويمثلها في شكل 7–9 سهم $\underline{A}_C$ ذو اتجاهين لأنها قد تكون يمينا أو يسارا) . والوصلة B معلومة العجلة مقدارا واتجاها ولذلك ننسب عجلة الوصلة C إلى B :

$$\overset{0\,0}{\underline{A}_{CB}} = \overset{0\,\surd}{\underline{A}_C} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_B} \qquad (e)$$

وتقع B هي والوصلة C على نفس الجسم الجامد ، ولذلك يمكن باستعمال المعادلة (4–9) أن نحلل العجلة النسبية إلي مركباتها:

$$\overset{0\,0}{\underline{A}_{CB}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{CB}} + \overset{0\,\surd}{\underline{A}^t_{CB}} \qquad (f)$$

ومقدار المركبة المماسة للعجلة النسبية $\underline{A}^t_{CB}$ غير معلوم لأن α_3 غير معلومة ولكنها عمودية على BC (ويمثلها في شكل 7–9 سهم ذو اتجاهين) ، أما المركبة العمودية (المركزية) $\underline{A}^n_{CB}$ فهي:

$$\underline{A}^n_{CB} = \omega_3^2\, R_{CB} = (3)^2\,(570) = 5\,130 \ \text{mm/s}^2$$

وهي تتجه من C إلى B (أي عكس اتجاه $\underline{R}_{CB}$ الذي هو متجه موضع C بالنسبة إلى B).

وبدمج المعادلات (f) , (e) , (d)

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{CB}} + \overset{0\,\surd}{\underline{A}^t_{CB}} = \overset{0\,\surd}{\underline{A}_C} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_B} \qquad (g)$$

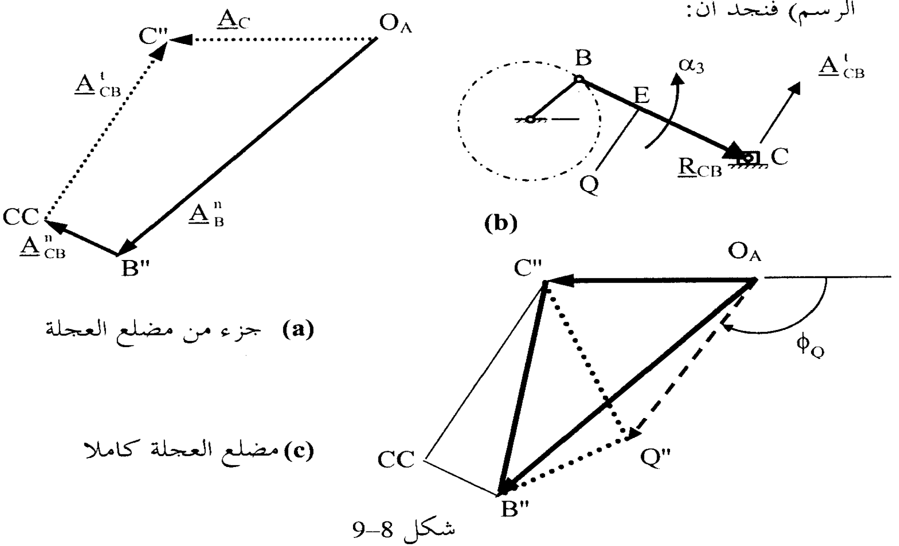
وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{A}_C$ ومقدار $\underline{A}^t_{CB}$. ولحل المعادلة g نرسم مضلع العجلة المبين في شكل 9–8a.

* نختار نقطة أصل مناسبة O_A ومنها نرسم سهما طوله 932 21 (بمقياس رسم مناسب) ليمثل A^n_B وبذلك نكون قد عينا النقطة "B. ومن النقطة "B نرسم سهما

يمثل $\underline{A}^{n}_{CB}$ طوله 130 5 -بنفس مقياس الرسم- موازيا لاتجاه $\underline{A}^{n}_{CB}$ المبين في شكل 9–7 وبذلك نكون قد عينا النقطة CC ، ومنها نرسم خطا متقطعا عموديا عليه (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}^{t}_{CB}$.

* من نقطة الأصل O_A نرسم خطا متقطعا أفقيا (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}_C$ ، فيتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة "C.

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{A}_C$ (وهو يساوي الطول من O_A إلى "C مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{A}^{t}_{CB}$ (وهو يساوي الطول من CC إلى "C مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:



(a) جزء من مضلع العجلة

(c) مضلع العجلة كاملا

شكل 8–9

$A_C = 12\ 400\ mm/s^2$

واتجاهها إلى اليسار (في اتجاه السهم من O_A إلى "C). أما مقدار المركبة المماسة $\underline{A}^{t}_{CB}$ فيقاس من CC إلى "C وهو:

$A^{t}_{CB} = 14\ 900\ mm/s^2$

ومنها:

$\alpha_3 = \underline{A}^t_{CB} \;/ R_{CB} \;= 14\,900 / 570 = 26.14 \;\text{rad/s}^2 \;\text{CCW}$

ونلاحظ أن اتجاه $\underline{\alpha}_3$ هو عكس اتجاه دوران عقـــرب الســـاعة (CCW) لأن $\underline{A}^t_{CB}$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{CB}$ حول النقطة B في عكس اتجاه عقرب الساعة كما هو مبين في شكل (b)8–9 .

وإحدى الطرق لإيجاد عجلة النقطة Q هي رسم صورة الضلع 3 في مضلع العجلة ، ويتم ذلك كما هو موضح في شكل (c)8–9 باستعمال خاصية التشابه الهندسي الذي يعني أن الزوايا في كل من الأصل والصورة متساوية ، فمن الآلية الأصلية (شكل 7–9) يمكن إما قياس الزوايا CBQ وBCQ من رسم دقيق للآلية ، أو حساب قيمها:

$\angle EBQ = \tan^{-1}(QE / BE) \approx 51^o \;,\; \angle ECQ = \tan^{-1}(QE / CE) \approx 34^o$

والآن نرسم خطا منقطا "B"Q (غير معلوم الطول) على زاوية مقدارها 51^o مع الخط "B"C في شكل (c)8–9 ونرسم خطا منقطا "C"Q (غير معلوم الطول) على زاوية مقدارها 34^o مع الخط "C"B فيتقاطع الخطان في "Q . ويكون مقدار $\underline{A}_Q$ يساوي الطول من O_A إلى "Q مضروبا في مقياس الرسم ، ولذلك فمن مضلع العجلة بالقياس نجد أن:

$A_Q = 13\,700 \;\text{mm/s}^2$

واتجاهها يتحدد بالزاوية ϕ_Q (شكل (c)8–9) ، وهي بالقياس

$\phi_Q = 124^o$

طريقة ثانية لإيجاد عجلة النقطة Q :

ربما تكون طريقة إيجاد صورة العجلة للجسم سهلة في كثير من الأحيان ، ولكنها ليست الطريقة الوحيدة لإيجاد عجلة نقطة مثل النقطة Q بل يمكن إيجاد عجلة هذه النقطة باستخدام المعادلة (5–9) التي تنسب عجلة Q إلى عجلة نقطة أخرى معلومة على نفس الضلع المتماسك مثل النقطة B أو النقطة C :

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{QC}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{QC}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^t_{QC}}$$

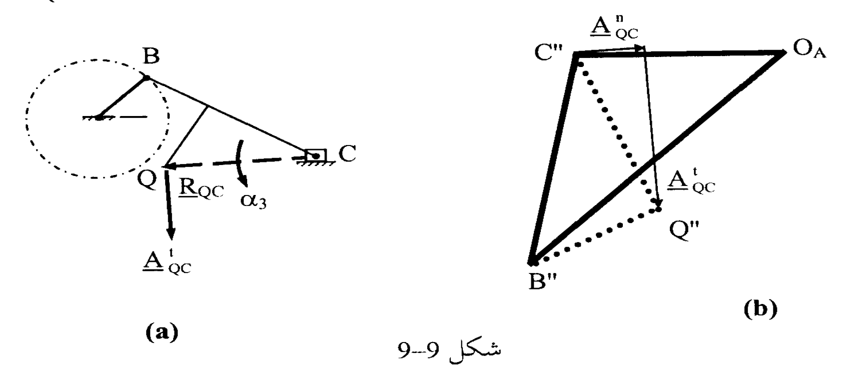
حيث المركبة العمودية $\underline{A}^n_{QC}$ تتجه من Q إلى C (أي عكس اتجاه $\underline{R}_{QC}$ كما

هو موضح في شكل 7–9) وقيمتها هي:

$$A^n_{QC} = \omega^2_3 R_{QC} = (3)^2 (446.5) = 4\ 018 \ \text{mm/s}^2$$

والذراع $\underline{R}_{QC}$ طوله 446.5 mm وهذه القيمة إما أن تقاس من رسم دقيق للآلية أو تحسب من المثلث CEQ القائم الزاوية. أما المركبة المماسة $\underline{A}^t_{QC}$ فتكون عمودية على المتجه $\underline{R}_{QC}$ كما هو موضح في شكل 7–9 وكذلك في شكل 9(a)–9 وقيمتها

$$A^t_{QC} = \alpha_3 \ R_{QC} = (26.14)\ (446.5) = 11\ 672 \ \text{mm/s}^2$$



شكل 9–9

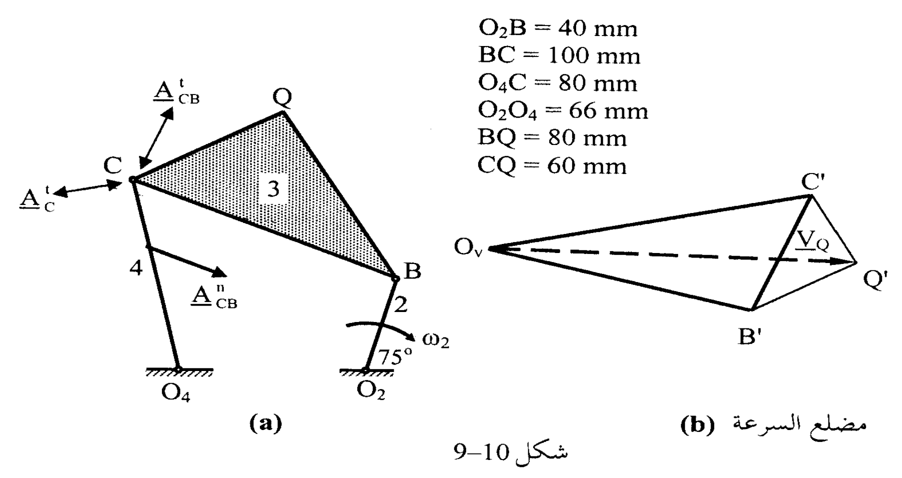
ولتعيين النقطة "Q في مضلع العجلة نرسم سهما من النقطة "C طوله 4 018 ليمثل A^n_{QC} (بمقياس الرسم المستعمل في مضلع العجلة) كما هو موضح في شكل 9(b)–9 ، ومن نهاية هذا السهم نرسم سهما آخر عموديا عليه طوله 11 672 ليمثل $\underline{A}^t_{QC}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة "Q. وتكون العجلة $\underline{A}_Q$ هي المتجه من O_A إلى "Q كما سبق.

مثال 4–9

في الآلية المبينة في شكل 10(a)–9 احسب العجلات الزاوية للأضلاع 4 , 3 ثم عين عجلة النقطة Q مقدارا واتجاها ، علما بأن الذراع O_2B يدور في اتجاه عقرب الساعة بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 40$ rad/s .

الحل: شكل 10(b)–9 يبين مضلع السرعة الذي تم الحصول عليه في مثال 4–8

ومنه عينت ω_3 وكانت قيمتها 8.5 rad/s وكذلك ω_4 وكانت قيمتها 24 rad/s وكلاهما في اتجاه عقرب الساعة.



(a)   مضلع السرعة (b)

شكل 10–9

لتحليل العجلة نركز الانتباه على المفصلات hinges لأننا إذا أوجدنا عجلاتها يمكننا إيجاد عجلات النقط الأخرى بينها. ولأن سرعة وعجلة ذراع الدوران O_2B معلومتان نبدأ بإيجاد عجلة الوصلة B .

$$\overset{00}{\underline{A}_B} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}_B^n} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}_B^t} \qquad \text{(h)}$$

$$A_B^n = \omega_2^2\, R_B = (40)^2\,(40) = 64\,000 \text{ mm/s}^2$$

$$A_B^t = \alpha_2\, R_B = 0$$

والآن ننسب عجلة الوصلة C إلى B

$$\overset{00}{\underline{A}_{CB}} = \overset{00}{\underline{A}_C} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_B} \qquad \text{(i)}$$

وتقع B هي والوصلة C على نفس الجسم الجامد 3 ، ولذلك يمكن باستعمال المعادلة (9–4) أن نحلل العجلة النسبية إلي مركباتها:

$$\overset{00}{\underline{A}_{CB}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{CB}^n} + \overset{0\surd}{\underline{A}_{CB}^t} \qquad \text{(j)}$$

ومقدار المركبة المماسة للعجلة النسبية $\underline{A}_{CB}^t$ غير معلوم لأن α_3 غير معلومة

لكنها عمودية على الضلع CB كما هو مبين في شكل (a)10–9 أما المركبة العمودية (المركزية) $\underline{A}^{n}_{CB}$ فهي:

$$A^{n}_{CB} = \omega_3^2 R_{CB} = (8.5)^2 (100) = 7\,225 \ \text{mm/s}^2$$

واتجاهها من C إلى B (أي عكس اتجاه $\underline{R}_{CB}$). وبدمج المعادلات (j) , (i) , (h)

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{CB}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^{t}_{CB}} = \overset{00}{\underline{A}_{C}} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{B}} \quad (k)$$

وهذه المعادلة تحتوي على ثلاثة مجاهيل فلا يمكن إيجادها بحل المعادلة ، ولذلك يجب أن نتخلص من أحد هذه المجاهيل. ويتم ذلك بأن ننسب عجلة الوصلة C إلى وصلة أخرى معلومة العجلة وتشاركها في نفس الضلع الجامد ، وهذه الصفات متوفرة في الوصلة O_4 :

$$\overset{0\surd}{\underline{A}_{CO_4}} = \overset{00}{\underline{A}_{C}} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{O_4}} \quad (l)$$

وبملاحظة أن $\underline{A}_{O_4} = 0$ وبذلك يكون:

$$\underline{A}_{C} = \underline{A}_{CO_4}$$

وتقع O_4 هي والوصلة C على نفس الجسم الجامد 4 ، ولذلك يمكن باستعمال المعادلة (4–9) أن نحلل العجلة النسبية $\underline{A}_{CO_4}$ (وهي تساوي $\underline{A}_{C}$) إلى مركباتها:

$$\overset{00}{\underline{A}_{C}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{C}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^{t}_{C}} \quad (m)$$

ومقدار المركبة المماسة للعجلة النسبية $\underline{A}^{t}_{C} = \underline{A}^{t}_{CO_4}$ غير معلوم لأن α_4 غير معلومة لكنها عمودية على الضلع CO_4 كما هو مبين في شكل (a)10–9 ، أما المركبة العمودية (المركزية) $\underline{A}^{n}_{C}$ فهي:

$$A^{n}_{C} = \omega_4^2 R_{CO_4} = (24)^2 (80) = 46\,080 \ \text{mm/s}^2$$

واتجاهها من C إلى O_4 (أي عكس اتجاه $\underline{R}_{CO_4}$). وبالتعويض من (m) في (k) نحصل على:

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{CB}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^{t}_{CB}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{C}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^{t}_{C}} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{B}} \quad (n)$$

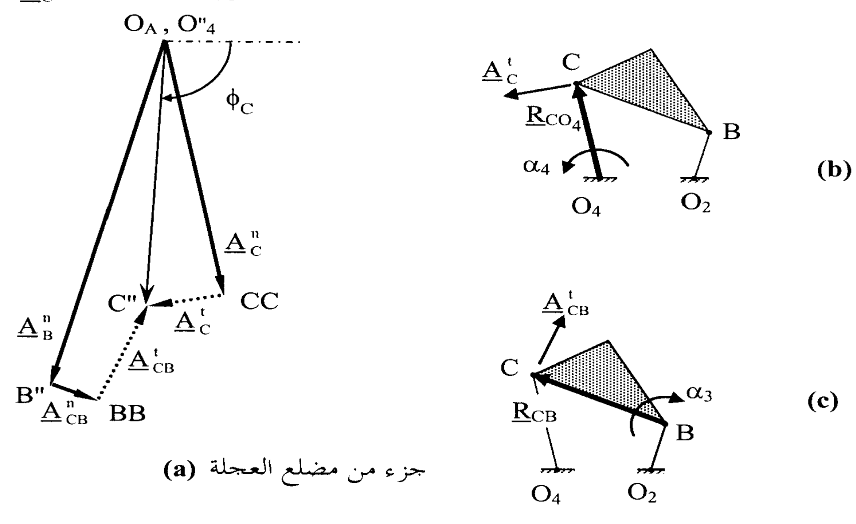
وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{A}^{t}_{C}$ ومقدار $\underline{A}^{t}_{CB}$. ولحل المعادلة (n) نرسم مضلع العجلة المبين في شكل (a)11–9:

* نختار نقطة أصل مناسبة O_A ومنها نرسم سهما طوله 64 000 (بمقياس رسم مناسب) ليمثل $\underline{A}_B^n$ وبذلك نكون قد عينا النقطة "B. ومن النقطة "B نرسم سهما يمثل $\underline{A}_{CB}^n$ طوله 7 225 (بنفس مقياس الرسم) موازيا للمتجه $\underline{A}_{CB}^n$ المبين في شكل 9–10 (أي عكس اتجاه $\underline{R}_{CB}$) وبذلك نكون قد عينا النقطة BB ، ومنها نرسم خطا متقطعا عموديا عليه (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}_{CB}^t$.

* من نقطة الأصل O_A نرسم سهما يمثل $\underline{A}_C^n$ موازيا لها وطوله 46 080 (بنفس مقياس الرسم) وبذلك نكون قد عينا النقطة CC ، ومنها نرسم خطا متقطعا عموديا عليه (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}_C^t$ فيتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة "C.

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{A}_C$ (وهو يساوي الطول من O_A إلى "C مضروبا في مقياس الرسم) ، ومقدار $\underline{A}_C^t$ (وهو يساوي الطول من CC إلى "C مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{A}_{CB}^t$ (وهو يساوي الطول من BB إلى "C مضروبا في مقياس الرسم). فنجد أن مقدار عجلة النقطة C هو:

$\underline{A}_C = 47\ 560\ \text{mm/s}^2$



شكل 9–11

واتجاهها يتحدد بالزاوية ϕ_C ، وهي بالقياس (شكل (9–11(a)

$$\phi_C = 93^o$$

أما مقدار المركبة المماسة $\underline{A}^t_C$ فيقاس من CC إلى "C وهو:

$$A^t_C = 11\ 460\ mm/s^2$$

أما مقدار المركبة المماسة $\underline{A}^t_{CB}$ فيقاس من BB إلى "C وهو:

$$A^t_{CB} = 18\ 800\ mm/s^2$$

ومنها:

$$\alpha_3 = \underline{A}^t_{CB} \ / R_{CB} = 18\ 800 / 100 = 188 \ \ rad/s^2 \ \ CW$$

$$\alpha_4 = A^t_C \ / R_{CO_4} = 11\ 460 / 80 = 143.25 \ \ rad/s^2 \ CCW$$

ونلاحظ أن اتجاه $\underline{\alpha}_4$ هو عكس اتجاه دوران عقرب الساعة (CCW) لأن $\underline{A}^t_C$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{CO_4}$ في عكس اتجاه عقرب الساعة حول النقطة O_4 كما هو مبين في شكل (9–11(b ، وأن اتجاه $\underline{\alpha}_3$ هو في اتجاه دوران عقرب الساعة (CW) لأن $\underline{A}^t_{CB}$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{CB}$ في اتجاه عقرب الساعة حول النقطة B كما هو مبين في شكل (9–11(c .

وإحدى الطرق لإيجاد عجلة النقطة Q هي رسم صورة الضلع 3 في مضلع العجلة ، ويتم ذلك كما هو موضح في شكل 12–9 باستعمال خاصية التشابه الهندسي الذي يعني أن الزوايا في كل من الأصل والصورة متساوية ، فمن الآلية الأصلية (شكل 10–9) يمكن إما قياس الزوايا CBQ وBCQ من رسم دقيق للآلية ، أو حساب قيمها بملاحظة أن المثلث CQB قائم الزاوية :

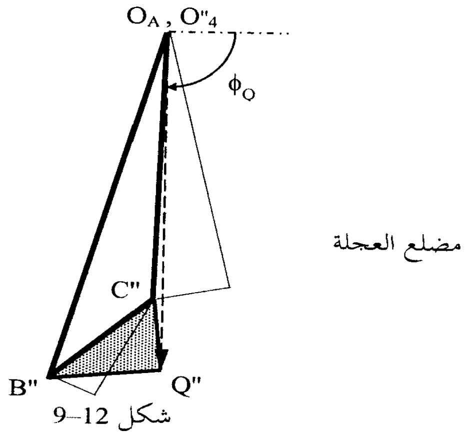
$$\angle CBQ = \tan^{-1} (QC / QB) \approx 37^o \ , \ \angle BCQ = \tan^{-1} (QB / QC) \approx 53^o$$

والآن نرسم خطا "B"Q (غير معلوم الطول) على زاوية مقدارها 37^o مع الخط "B"C في شكل 12–9 ونرسم خطا "C"Q (غير معلوم الطول) على زاوية مقدارها 53^o مع الخط "C"B فيتقاطع الخطان في "Q . ويكون مقدار $\underline{A}_Q$ يساوي الطول من O_A إلى "Q مضروبا في مقياس الرسم ، ولذلك فبالقياس من مضلع العجلة نجد أن

$$A_Q = 59\ 460\ mm/s^2$$

واتجاه $\underline{A}_Q$ يتحدد بالزاوية ϕ_Q ، وهي بالقياس:

$$\phi_Q = 89^o$$



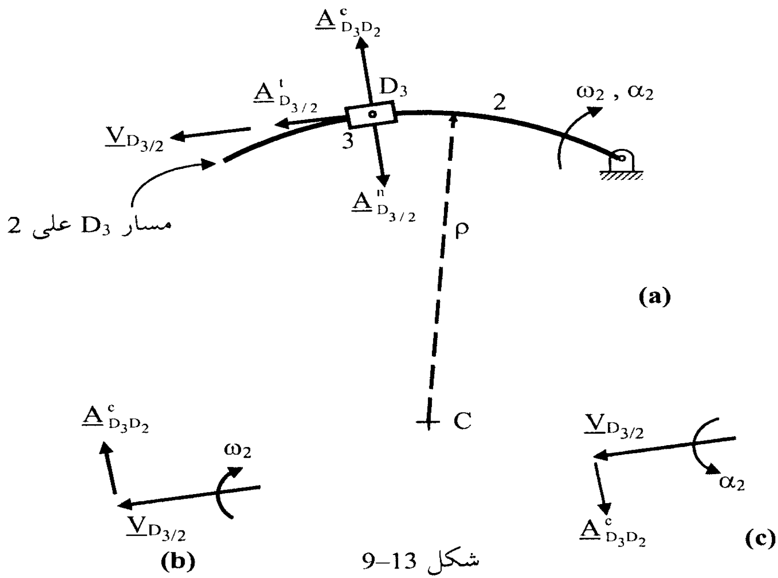
شكل 12–9

وكما وضح المثال السابق فإن طريقة إيجاد صورة العجلة للجسم ليست الطريقة الوحيدة لإيجاد عجلة نقطة مثل النقطة Q بل يمكن إيجاد عجلة هذه النقطة باستخدام المعادلة (5–9) التي تنسب عجلة Q إلى عجلة نقطة أخرى معلومة على نفس الضلع المتماسك مثل النقطة B أو النقطة C .

9.4 التلامس المباشر – الحركة الظاهرية

كثير من أجزاء الآليات تدور بالتلامس مع أسطح أجزاء أخرى مع انزلاق أسطح التلامس على بعضها ، وقد بينا في الفصلين الأول والثامن أن الانزلاق يحدث نتيجة لوجود حركة نسبية بين نقطتي تلامس الجسمين (أي أن السرعة المطلقة لنقطتي التلامس غير متساوية) ، وأن السرعة النسبية بين نقطتي التلامس يجب أن تكون في اتجاه المماس المشترك للجسمين عند موضع التلامس. وهذه الطريقة سهلة التطبيق نسبيا عند تحليل السرعة ولكنها لا تنطبق على فرق العجلتين (أي العجلة النسبية) بين نقطتي التلامس حيث إن اتجاه هذه العجلة النسبية عموما ليس في اتجاه المماس المشترك للجسمين وعلى هذا يلزم استعمال طريقة العجلة الظاهرية والتي تعتمد على دراسة حركة نقطتين منطبقتين لحظيا مع معرفة مسار إحدى النقطتين على الضلع الذي يحتوي النقطة الأخرى ، وهذه العجلة الظاهرية لها ثلاث مركبات كما هو موضح بمثال بسيط في شكل 13–9 والذي يوضح أن المنـــزلق 3 يتحرك إلى الخارج نسبة

إلى الذراع المقوس 2 بسرعة منتظمة $\underline{V}_{D_3/2}$ بينما يدور الذراع نفسه بسرعة زاوية ω_2 وعجلة زاوية α_2 ، والمطلوب حساب عجلة النقطة D_3 التي هي جزء من المنـــزلق.



شكل 13–9

يجب ملاحظة أن هناك نقطتين هما D_2 , D_3 منطبقتان في اللحظة المبينة بالرسم حيث النقطة D_2 هي جزء لا يتجزأ من الذراع 2 ثابتة فيه وتتحرك معه ، أما النقطة الأخرى D_3 فهي منطبقة على D_2 في اللحظة المبينة بالرسم ولكنها جزء لا يتجزأ من المنـــزلق 3 . وبعد مرور فترة زمنية قصيرة، تتحرك D_3 مع المنـــزلق بينما تتحرك D_2 مع الذراع 2 وتنفصل النقطتان عن بعضهما. ولابد لتحليل الحركة من معرفة مسار إحدى النقطتين على الضلع الذي يحتوي النقطة الأخرى ، فشكل 9–13(a) يبين أن مسار D_3 على الضلع 2 هو نفسه القوس الدائري الذي مركز تقوسه هو النقطة C . ويجب ملاحظة أن مسار D_2 على الضلع 3 ليس هو القوس الدائري وإنما هو مسار آخر يتطلب إيجاده رسم الآلية في عدة أوضاع متتالية. وبمعرفة مسار D_3 على الضلع 2 يمكن إيجاد علاقة بين عجلتي النقطتين من المعادلة:

$$\underline{A}_{D_{3/2}} = \underline{A}_{D_3} - \underline{A}_{D_2} \qquad (9-9)$$

حيث $\underline{A}_{D_{3/2}}$ هي **العجلة الظاهرية** بين النقطتين (بعض المراجع تسميها العجلة النسبية) ، $\underline{A}_{D_3}$ هي العجلة المطلقة للنقطة D_3 ، $\underline{A}_{D_2}$ هي العجلة المطلقة للنقطة D_2 .
وتتكون العجلة الظاهرية $\underline{A}_{D_{3/2}}$ من ثلاث مركبات هي:

$$\underline{A}_{D_{3/2}} = \underline{A}^{n}_{D_{3/2}} + \underline{A}^{t}_{D_{3/2}} + \underline{A}^{c}_{D_3 D_2} \qquad (9-10)$$

حيث المركبة العمودية (المركزية) $\underline{A}^{n}_{D_{3/2}}$ تكون عمودية على المسار ودائما متجهة إلى مركز تقوس هذا المسار ، شكل 9-13(a) ، وقيمتها:

$$A^{n}_{D_{3/2}} = (V^2_{D_{3/2}} \div \rho) \qquad (9-11)$$

حيث ρ هو نصف قطر المسار عند النقطة D_2 (المنطبقة على D_3) ، وعلى ذلك تكون هذه المركبة العمودية معلومة المقدار والاتجاه لأن السرعة الظاهرية $V_{D_{3/2}}$ معلومة من مضلع السرعة . أما $\underline{A}^{t}_{D_{3/2}}$ فهي المركبة المماسة للمسار عند النقطة D_2 كما هو مبين في شكل 9-13(a) وهي دائما مجهولة المقدار وقد تكون موجبة إذا كانت في اتجاه السرعة الظاهرية $\underline{V}_{D_{3/2}}$ ، أو سالبة إذا كانت عكس اتجاهها.
والمركبة الثالثة هي:

$$\underline{A}^{c}_{D_3 D_2} = 2\, \underline{\omega}_2 \times \underline{V}_{D_{3/2}} \qquad (9-12)$$

وهذه الكمية تسمى عجلة كوريولس[1] Coriolis acceleration وتظهر عند دراسة حركة جسمين متحركين بالنسبة لبعضهما مثل انزلاق نقطة D_3 على الذراع 2 في المسألة الحالية ، واتجاهها دائما يكون عموديا على المسار الظاهري للنقطة D_3 على الضلع 2 إما ناحية مركز التقوس أو بعيدا عنه حسب اتجاه ω_2 كما هو مبين في شكل 9-13(b, c) ، ومقدارها أيضا يكون معلوما (أي يمكن حسابه من مضلع السرعة).
ويعرض ملحق الفصل التاسع لكيفية إثبات المعادلة 9-12 . وعجلة كوريولس لا يشعر بها شخص ثابت في المسار (الذراع المقوس في هذه الحالة) ويتحرك معه ، ولكن هذا الشخص يشعر بالمركبتين الأخرتين $\underline{A}^{n}_{D_{3/2}}$ و $\underline{A}^{t}_{D_{3/2}}$.

---

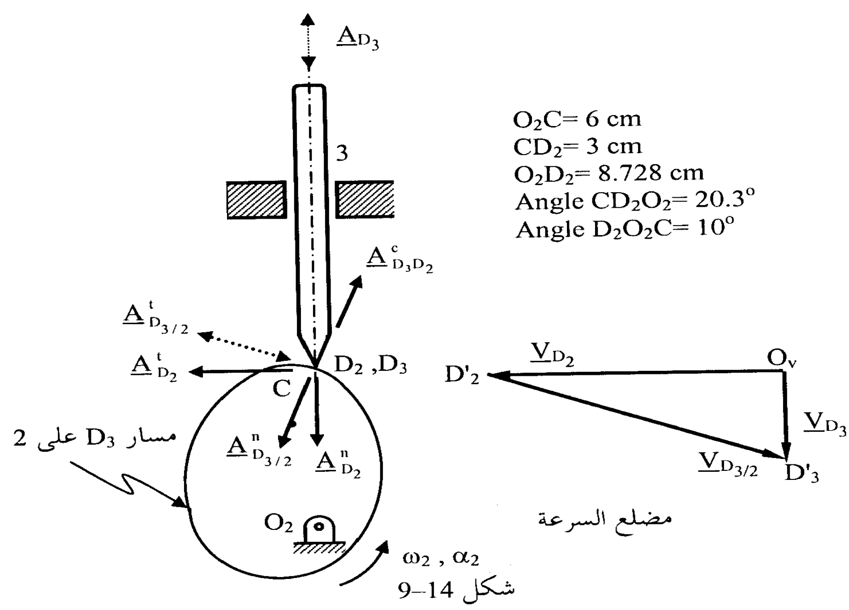
(١) Coriolis مهندس عسكري فرنسي عاش في الفترة (1843-1792) وكان أول من وجه النظر إلى وجود هذه المركبة في الحركة.

مثال 5–9

الكامة المبينة في شكل 14–9 تدور عكس عقرب الساعة بسرعة زاوية مقدارها $\omega_2 = 10$ rad/s وبعجلة زاوية $\alpha_2 = 20$ rad/s^2 عكس عقرب الساعة. احسب العجلة الخطية للتابع في اللحظة المبينة بالشكل . نقطة C هي مركز انحناء سطح الكامة عند نقطة التلامس.

الحل:

شكل 14–9 يبين أيضا مضلع السرعة الذي تم الحصول عليه في مثال 6–8 ومنه تم تعيين مقدار السرعة الظاهرية $\underline{V}_{D3/2}$ وكانت قيمتها 93 cm/s في الاتجاه من D'_2 إلى D'_3 .



شكل 14–9

النقطة D هي نقطة التلامس بين التابع والكامة وهي في الواقع موضع تطابق لحظي بين D_2 (وهي جزء من الكامة) و D_3 (وهي جزء من التابع). ويمكن بسهولة

ملاحظة أن مسار D_3 على الكامة 2 هو نفسه سطح الكامة لأن النقطة D_3 تظل ملامسة لسطح الكامة طوال دورانها ، ولذلك يمكن تطبيق المعادلة (10–9) بين هاتين النقطتين:

$$\underline{A}_{D3/2} = \underline{A}^n_{D_{3/2}} + \underline{A}^t_{D_{3/2}} + \underline{A}^c_{D_3 D_2}$$

وبالتعويض من المعادلة (9–9) يكون:

$$\underline{A}_{D_3} - \underline{A}_{D_2} = \underline{A}_{D3/2} = \underline{A}^n_{D_{3/2}} + \underline{A}^t_{D_{3/2}} + \underline{A}^c_{D_3 D_2} \qquad \text{(p)}$$

وبالتعويض عن $\underline{A}_{D_2}$ بمركباتها العمودية والمماسة:

o o　　√ √　　√ √

$$\underline{A}_{D_2} = \underline{A}^n_{D_2} + \underline{A}^t_{D_2}$$

نحصل على:

o √　　√ √　　√ √　　√ √　　o √　　√ √

$$\underline{A}_{D_3} - (\underline{A}^n_{D_2} + \underline{A}^t_{D_2}) = \underline{A}^n_{D_{3/2}} + \underline{A}^t_{D_{3/2}} + \underline{A}^c_{D_3 D_2} \qquad \text{(q)}$$

ونقطة التلامس على التابع وهي النقطة D_3 عجلتها $\underline{A}_{D_3}$ رأسية ولكنها مجهولة المقدار. وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{A}^t_{D_{3/2}}$ ومقدار $\underline{A}_{D_3}$. ولحل المعادلة (q) نحسب المركبات المعلومة:

$$A^n_{D_2} = \omega_2^2 R_{D_2 O_2} = (10)^2 (8.728) = 872.8 \text{ cm/s}^2$$

ويكون اتجاه $\underline{A}^n_{D_2}$ من النقطة D_2 في اتجاه النقطة O_2.

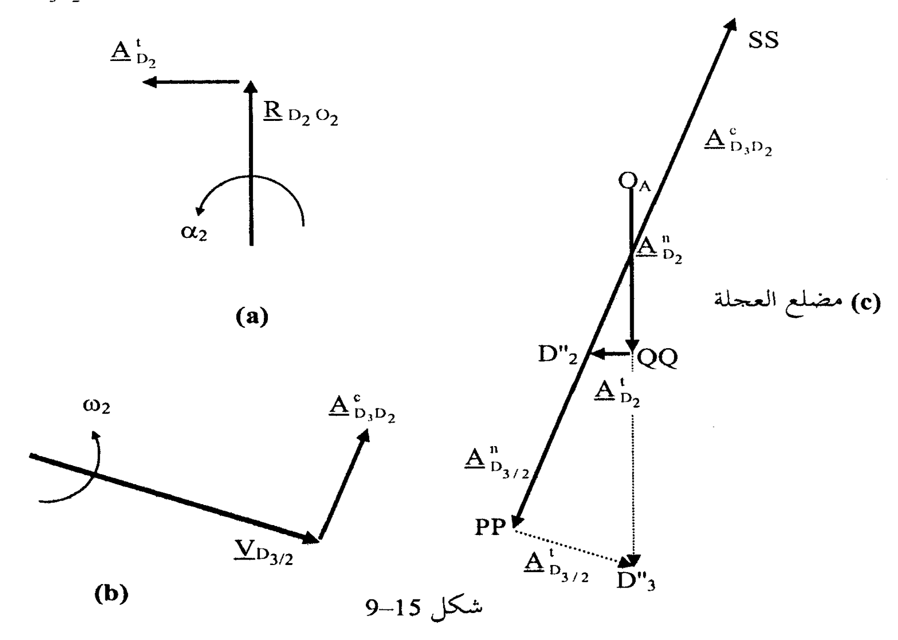
$$A^t_{D_2} = \alpha_2 R_{D_2 O_2} = (20)(8.728) = 174 \text{ cm/s}^2$$

واتجاه $A^t_{D_2}$ يكون عمودي على الخط D_2O_2 كما هو مبين في شكل 9–15(a) ناحية اليسار لأن العجلة الزاوية α_2 تميل لإدارة المتجه $\underline{R}_{D_2 O_2}$ عكس عقرب الساعة كما هو مبين في الشكل . واتجاه المركبة العمودية للعجلة الظاهرية $A^n_{D_{3/2}}$ يكون عموديا على سطح الكامة (وهو مسار D_3 على الكامة 2) من النقطة D_2 في اتجاه النقطة C (وهي مركز انحناء الكامة عند D_2) ، أما مقدارها فهو (لاحظ أن ρ هي المسافة CD_2 وتساوي 3 cm):

$$\underline{A}^{n}_{D_{3/2}} = V^2_{D_{3/2}} \div \rho = (93)^2 / (3) = 2884 \text{ cm/s}^2$$

ويكون اتجاه مركبة كوريولس $A^{c}_{D_3D_2}$ عموديا على سطح الكامة (وهو مسار D_3 على الكامة 2) عند النقطة D_2 كما هو مبين في شكل 14–9 ومقدارها هو:

$$\underline{A}^{c}_{D_3D_2} = 2\,\omega_2\, V_{D_{3/2}} = 2(10)(93) = 1860 \text{ cm/s}^2$$



شكل 15–9

وتكون هذه العجلة لأعلى لأن السرعة الزاوية ω_2 تميل لإدارة متجه السرعة الظاهرية $V_{D_{3/2}}$ عكس عقرب الساعة كما هو مبين في شكل 15(b)–9 .

ثم نرسم مضلع العجلة المبين في شكل 15(c)–9 لإيجاد المجهولين في المعادلة (q) وهما مقدار $\underline{A}_{D_3}$ ومقدار $\underline{A}^{t}_{D_{3/2}}$:

* نختار نقطة أصل مناسبة O_A ومنها نرسم سهما طوله 872.8 (بمقياس رسم

مناسب) ليمثل A''_{D_2} موازيا للمتجه $\underline{R}_{D_2 O_2}$ (وهو المتجه من O_2 إلى D_2 في شكل 9–14) ولكن عكس اتجاهه وبذلك نكون قد عينا النقطة QQ ومنها نرسم سهما طوله 174 (بنفس مقياس الرسم) ليمثل $\underline{A}^t_{D_2}$ في الاتجاه المبين في شكل 9–15(a) وبذلك نكون قد عينا النقطة D''_2 . ومن النقطة D''_2 نرسم سهما يمثل $\underline{A}^c_{D_3 D_2}$ طوله 1860 (بنفس مقياس الرسم) في الاتجاه المبين في شكل 9–15(b) وبذلك نكون قد عينا النقطة SS ، ومنها نرسم سهما يمثل $\underline{A}''_{D_{3/2}}$ طوله 2884 (بنفس مقياس الرسم) وبذلك نكون قد عينا النقطة PP ، ومنها نرسم خطا متقطعا عموديا عليه (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}^t_{D_{3/2}}$.

* من نقطة الأصل O_A نرسم خطا رأسيا متقطعا (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}_{D_3}$ فيتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة D''_3.

* نقيس من الرسم $\underline{A}_{D_3}$ وهو مقدار عجلة النقطة D_3 (وهو يساوي الطول من O_A إلى D''_3 مضروبا في مقياس الرسم):

$$\underline{A}_{D_3} = 2030 \text{ cm/s}^2$$

واتجاه $\underline{A}_{D_3}$ يكون لأسفل وهو اتجاه السهم المرسوم من O_A إلى D''_3.

ملحوظة: يمكن أيضا حل هذه الآلية باستعمال الآلية المكافئة وهي في هذه الحالية آلية المنـــزلق كما يوضح ذلك مثال 6–6 ، وفي ذلك المثال تم إيجاد العجلات رياضيا ، ولكن يمكن أيضا تحليل العجلات للآلية المكافئة برسم مضلع العجلة وهو في هذه الحالة يكون أسهل بكثير من الحل المعتمد على استخدام العجلة الظاهرية للآلية الأصلية والمبين في شكل 9–15(c) .

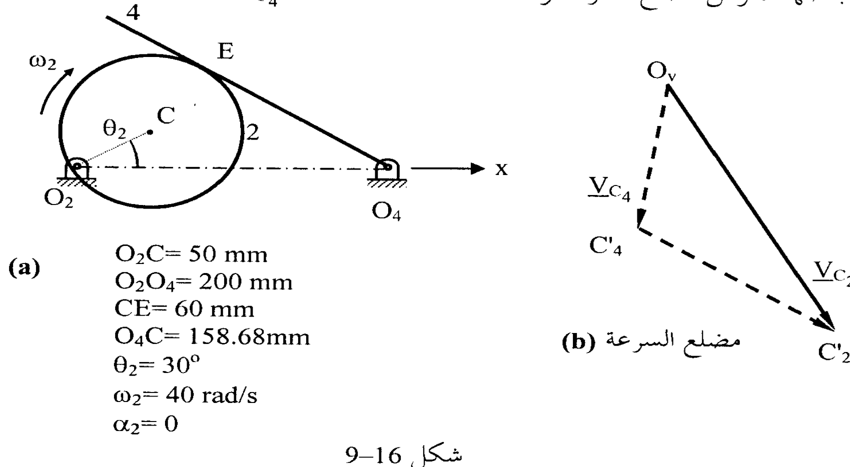
مثال 9–6

تدور الكامة 2 المبينة في شكل 9–16(a) بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 40$ rad/s في اتجاه عقرب الساعة. احسب العجلة الزاوية للذراع 4.

الحل:

شكل 9–16(b) يبين مضلع السرعة الذي تم الحصول عليه في مثال 8–8 ومنه عينت ω_4 ووجد أنها تساوي 6.54 rad/s وهي عكس عقرب الساعة ، وكذلك عين

مقدار السرعة الظاهرية وكانت قيمته $V_{C_{2/4}}$ = 1361.5 mm/s في الاتجاه من C'_4 إلى C'_2 . وقد اعتمد الحل على استعمال المسار الظاهري لمركز الكامة C_2 على الضلع 4 وهو الخط المتقطع الموازي للذراع 4 كما هو مبين في شكل 9–17(a) والسرعة الظاهرية $\underline{V}_{C_{2/4}}$ للمركز هي في اتجاه هذا الخط. وهذا الحل مبني على التفرقة بين C_2 وهي مركز الكامة وبين نقطة أخرى هي C_4 منطبقة على C_2 في اللحظة المبينة بالرسم ولكنها جزء لا يتجزأ من الذراع 4 . وبعد مرور فترة زمنية قصيرة تتحرك C_2 مع الكامة بينما تتحرك C_4 مع الذراع 4 وتنفصل النقطتان عن بعضهما. ومن مضلع السرعة وجدنا أن V_{C_4} = 1038 mm/s .



شكل 16–9

وتكون معادلة العجلة الظاهرية بين C_2 و C_4 هي:

$$\underline{A}_{C_{2/4}} = \underline{A}_{C_2} - \underline{A}_{C_4} \qquad \text{(r)}$$

ويمكن إيجاد العجلة المطلقة للنقطة C_2 في اللحظة المبينة بالرسم من المعادلة:

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{C_2}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{C_2}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^t_{C_2}} \qquad \text{(s)}$$

حيث

$$A^n_{C_2} = \omega_2{}^2\, R_{C_2 O_2} = (40)^2\,(50) = 80\,000 \text{ mm/s}^2$$

$A^t_{C_2} = \alpha_2 R_{C_2 O_2} = 0$

واتجاه المركبة العمودية $\underline{A}^n_{C_2}$ يكون من C_2 إلى O_2 كما هو موضح في شكل 9–17(a) .كما يمكن إيجاد العجلة المطلقة للنقطة C_4 في اللحظة المبينة بالرسم من المعادلة:

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{C_4}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{C_4}} + \overset{\circ\surd}{\underline{A}^t_{C_4}} \tag{t}$$

حيث:

$A^n_{C_4} = \omega_4{}^2 R_{C_4 O_4} = (6.54)^2\,(158.68) = 6\,787 \text{ mm/s}^2$

واتجاه المركبة $\underline{A}^n_{C_4}$ يكون من C_4 إلى O_4 كما هو موضح في شكل 9–17(a) ، أما المركبة المماسة $\underline{A}^t_{C_4}$ فمقدارها مجهول ولكن اتجاهها عمودي على الخط $C_4 O_4$.

والعجلة الظاهرية $\underline{A}_{C_{2/4}}$ تتكون من ثلاث مركبات هي:

$$\underline{A}_{C_{2/4}} = \underline{A}^n_{C_{2/4}} + \underline{A}^t_{C_{2/4}} + \underline{A}^c_{C_2 C_4} \tag{u}$$

حيث المركبة العمودية على المسار $\underline{A}^n_{C_{2/4}} = 0$ لأن المسار هو خــط مستقيم نصف قطر تقوسه $\rho = \infty$. أما مركبة كوريولس فمقدارها هو:

$\underline{A}^c_{C_2 C_4} = 2\,\omega_4\, V_{C_{2/4}} = 2(6.54)(1361.5) = 17\,808 \text{ mm/s}^2$

واتجاهها عمودي على المسار ويتحدد كما هو موضح في شكل 9–17(b) من ملاحظة أن ω_4 تميل إلى إدارة المتجه $\underline{V}_{C_{2/4}}$ عكس عقرب الساعة. أما المركبة المماسة $\underline{A}^t_{C_{2/4}}$ فمقدارها مجهول ولكن اتجاهها هو نفس اتجاه المسار الظاهري لمركز الكامة C_2 على الضلع 4 وهو الخط المتقطع الموازي للذراع 4 كما هو مبين في شكل 9–17(a) .

وبالتعويض من المعادلات (s,t,u) في المعادلة (r) نحصل على:

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{C_2}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^t_{C_2}} - (\overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{C_4}} + \overset{\circ\surd}{\underline{A}^t_{C_4}}) = (\overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{C_{2/4}}} + \overset{\circ\surd}{\underline{A}^t_{C_{2/4}}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^c_{C_2 C_4}}) \tag{v}$$

وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{A}^t_{C_{2/4}}$ ومقدار $\underline{A}^t_{C_4}$. ولحل المعادلة

(v) نرسم مضلع العجلة المبين في شكل (f) ,9–17(c):

* نختار نقطة أصل مناسبة O_A ومنها نرسم سهما طوله 80 000 (بمقياس رسم مناسب) في شكل 9–17(c) ليمثل المركبة $\underline{A}^n_{C_2}$ موازيا للمتجه $\underline{R}_{C_2 O_2}$ (وهو المتجه من O_2 إلى C_2 في شكل 9–17(a)) ولكن عكس اتجاهه وبذلك نكون قد عينا النقطة C''_2.

* من النقطة C''_2 نرسم سهما يمثل $\underline{A}^c_{C_2C_4}$ طوله 17 808 (بنفس مقياس الرسم) كما هو مبين في شكل 9–17(c) وبذلك نكون قد عينا النقطة PP . ومن المهم جدا في هذه الحالة ملاحظة أن مركبة كوريولس $\underline{A}^c_{C_2C_4}$ تنتهي عند النقطة C''_2 (ولا تبدأ عندها كما في الحل الخطأ المبين في شكل 9–17(d)) وذلك لأن العجلة الظاهرية $\underline{A}_{C_{2/4}}$ ومركباتها الثلاث تبدأ من النقطة C''_4 (والتي لم يتم تعيينها بعد) وتنتهي عند النقطة C''_2 . ومن الناحية الرياضية فإن شكل 9–17(d) معناه أن مركبة كوريولس مضافة إلى العجلة $\underline{A}_{C_2}$ ، وهذا خطأ لأن إعادة كتابة المعادلة (v) على الصورة

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{C_2}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^t_{C_2}} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}^c_{C_2C_4}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{C_4}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^t_{C_4}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{C_{2/4}}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^t_{C_{2/4}}}$$

يبين بوضوح أن مركبة كوريولس يجب أن تطرح من العجلة $\underline{A}_{C_2}$ أي أن السهمين اللذين يمثلان هذين المتجهين يلتقيان عند النقطة C''_2 وهذا ما يبينه شكل .9–17(c)

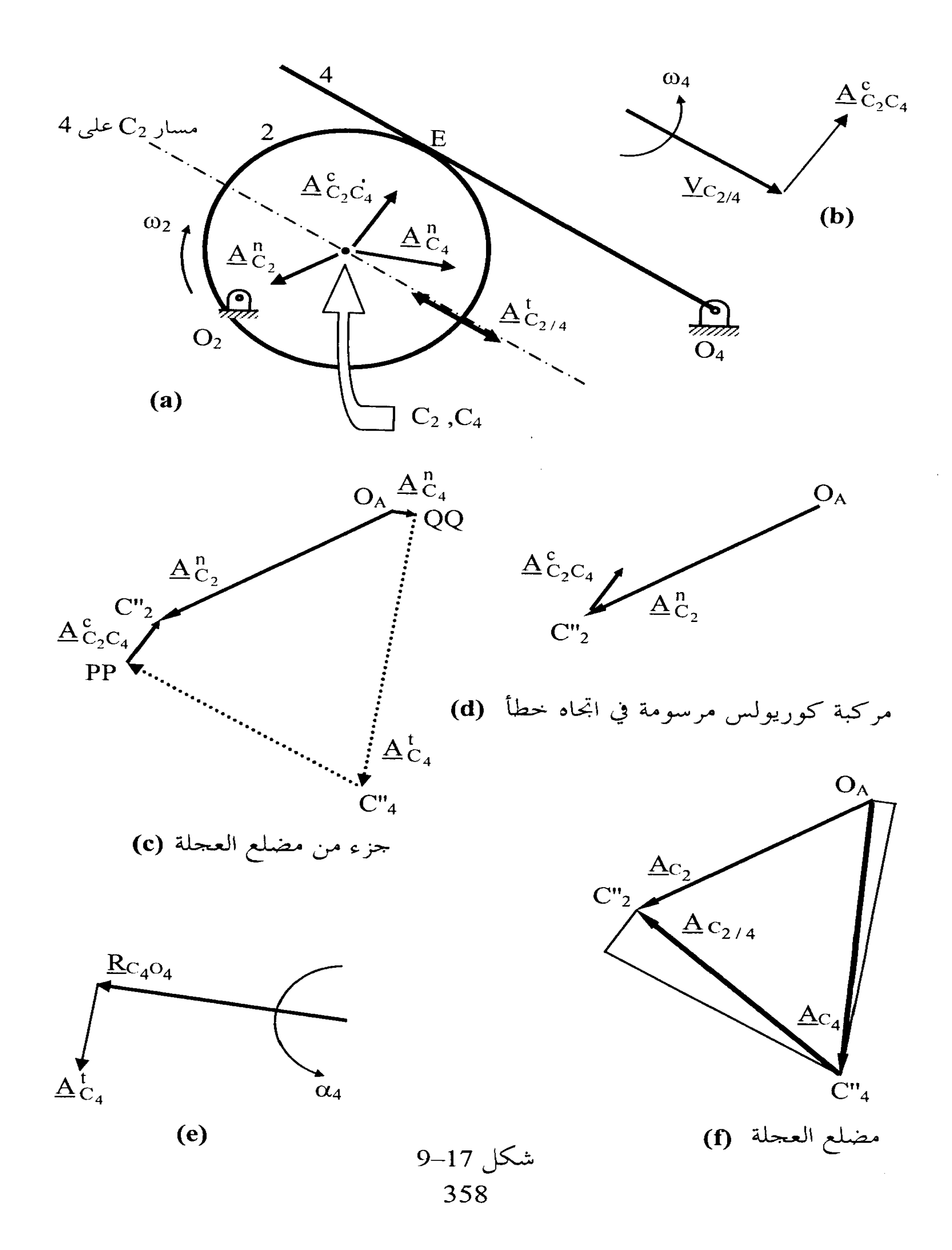
* من النقطة PP نرسم خطا متقطعا (مجهول الطول) عموديا على $\underline{A}^c_{C_2C_4}$ ليمثل $\underline{A}^t_{C_{2/4}}$.

* من نقطة الأصل O_A نرسم سهما طوله 6 787 (بنفس مقياس الرسم) ليمثل $\underline{A}^n_{C_4}$ في الاتجاه المبين في شكل 9–17(c) وبذلك نكون قد عينا النقطة QQ ، ومنها نرسم خطا متقطعا عموديا عليه (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}^t_{C_4}$.

* يتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة C''_4 وبذلك يكتمل مضلع العجلة، ومنه نوجد بالقياس (مع استعمال مقياس الرسم) من شكل 9–17(c).

$A^t_{C_4} = 97\ 800\ mm/s^2$

$\underline{A}^t_{C_{2/4}} = 81\ 700\ mm/s^2$



4
مسار C_2 على 4
2
E
ω_4
$\underline{A}^c_{C_2C_4}$
$\underline{V}_{C_{2/4}}$
(b)
ω_2
$\underline{A}^n_{C_2}$
$\underline{A}^n_{C_4}$
$\underline{A}^t_{C_{2/4}}$
O_2
O_4
(a)
C_2 ,C_4
O_A
QQ
C''_2
PP
$\underline{A}^t_{C_4}$
C''_4
جزء من مضلع العجلة (c)
مركبة كوريولس مرسومة في اتجاه خطأ (d)
$\underline{A}_{C_2}$
$\underline{A}_{C_{2/4}}$
$\underline{A}_{C_4}$
$\underline{R}_{C_4O_4}$
α_4
(e)
مضلع العجلة (f)

شكل 9–17

حيث تقاس المركبة $\underline{A}^t_{C_4}$ من النقطة QQ إلى النقطة C''_4 و تقاس المركبة $\underline{A}^t_{C_{2/4}}$ من النقطة C''_4 إلى النقطة PP . أما العجلة الظاهرية $\underline{A}_{C_{2/4}}$ فتقاس من النقطة C''_4 إلى النقطة C''_2 في شكل 9–17(f) ويكون مقدارها:

$$A_{C_{2/4}} = 83\ 620\ \text{mm/s}^2$$

وتقاس العجلة المطلقة للنقطة C_4 ، أي $\underline{A}_{C_4}$ ، من النقطة O_A إلى النقطة C''_4 ويكون مقدارها:

$$A_{C_4} = 98\ 035\ \text{mm/s}^2$$

وتحسب العجلة الزاوية للذراع 4 باستعمال المركبة $\underline{A}^t_{C_4}$:

$$\alpha_4 = A^t_{C_4} / R_{C_4O_4} = 97\ 800 / 158.68 = 616.33\ \text{rad/s}^2\ \ \text{CCW}$$

ونلاحظ أن اتجاه $\underline{\alpha}_4$ هو عكس اتجاه دوران عقرب الساعة (CCW) لأن المركبة $\underline{A}^t_{C_4}$ تميل إلى إدارة المتجه $\underline{R}_{C_4O_4}$ في عكس اتجاه عقرب الساعة كما هو مبين في شكل 9–17(e) .

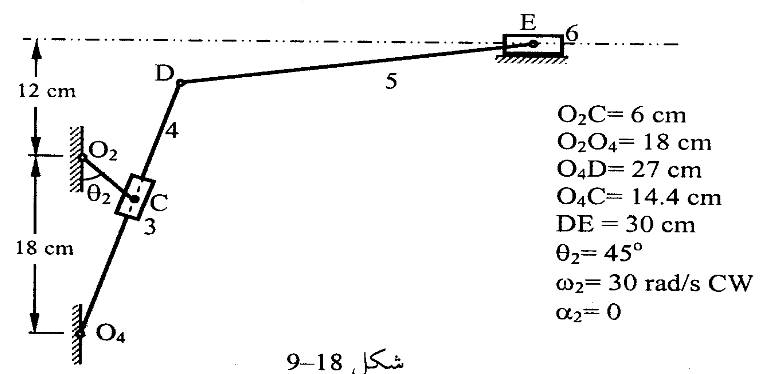
مثال 9–7

في آلية العودة السريعة المبينة في شكل 9–18 يدور الذراع O_2C مع عقرب الساعة بسرعة منتظمة $\omega_2 = 30$ rad/s . احسب العجلة الزاوية للضلعين 4 , 5 والعجلة الخطية للنقطتين E , D في اللحظة المبينة بالشكل .

الحل:هذا المثال يوضح حالة انزلاق أحد الأضلاع على ضلع آخر متحرك حيث يتحرك المنـــزلق 3 على الذراع O_4D . وهذه الآلية تتكون من آليتين بسيطتين: الأولى هي آلية المنـــزلق المنعكس (الذراع O_2C والأضلاع 3 , 4) ، والثانية هي آلية المنـــزلق المنحرف (الأضلاع 4 , 5 , 6). والحل يبدأ بالآلية الأولى لأن سرعة ذراع الدوران O_2C معلومة. ويجب ملاحظة أن هناك نقطتين C_3 , C_2 منطبقتان في كل الأوقات حيث نقطة C_3 هي جزء لا يتجزأ من المنـــزلق ثابتة فيه وتتحرك معه بينما C_2 هي جزء من الذراع O_2C . ولابد من التفرقة بين هاتين النقطتين (أي C_3 , C_2) وبين نقطة أخرى هي C_4 منطبقة على C_2 في اللحظة المبينة بالرسم ولكنها جزء لا يتجزأ من الذراع 4 . وبعد مرور فترة زمنية قصيرة، تتحرك C_2 مع المنـــزلق بينما

تتحرك C_4 مع الذراع 4 وتنفصل النقطتان عن بعضهما. وفي مثال 7–8 تم الحصول على مضلع السرعة المبين في شكل 9–19(b) ومنه عينت قيم السرعات الآتية:

$V_{C_4} = 84$ cm/s, $V_{C_{2/4}} = 159$ cm/s, $\omega_4 = 5.84$ rad/s CCW, $V_D = 157.7$ cm/s,
$V_{ED} = 47$ cm/s, $V_E = 144$ cm/s, $\omega_5 = 1.57$ rad/s CW



شكل 9–18

حيث $\underline{V}_{C_2}$ هي السرعة المطلقة للنقطة C_2 ، $\underline{V}_{C_4}$ هي السرعة المطلقة للنقطة C_4 ، أما $\underline{V}_{C_{2/4}}$ فهي السرعة الظاهرية وهي سرعة C_2 كما تظهر بالنسبة للضلع 4 وذلك بملاحظة أنه إذا التصق شخص مع الذراع O_4D وتحرك معه فإنه يرى المنـــزلق (ومعه النقطة C_2) يتحرك فقط على طول الخط O_4D وهذه الحركة هي الحركة الظاهرية للنقطة C_2 على الضلع 4 أي أن الخط O_4D في شكل 9–19(a) هو مسار C_2 على 4.
ومعادلة العجلة الظاهرية في هذه الحالة هي:

$$\underline{A}_{C_{2/4}} = \underline{A}_{C_2} - \underline{A}_{C_4} \qquad \text{(w)}$$

ويمكن إيجاد العجلة المطلقة للنقطة C_2 في اللحظة المبينة بالرسم من العلاقة:

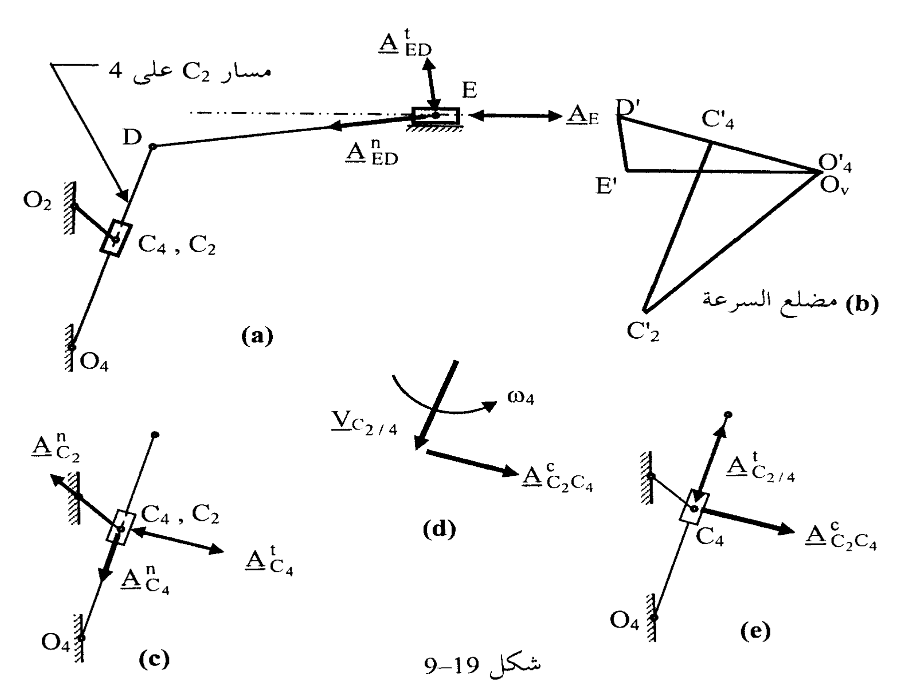
$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{C_2}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{C_2}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^t_{C_2}} \qquad \text{(x)}$$

حيث:

$$A^n_{C_2} = \omega_2^2 \, R_{C_2O_2} = (30)^2 (6) = 5400 \text{ cm/s}^2$$

ولأن ω_2 منتظمة تكون $\alpha_2 = 0$ ولذلك تكون:

$$A^t_{C_2} = \alpha_2 \, R_{C_2O_2} = 0$$



شكل 9-19

واتجاه المركبة $\underline{A}^n_{C_2}$ يكون من C_2 إلى O_2 كما هو موضح في شكل 9-19(c)
كما يمكن إيجاد العجلة المطلقة للنقطة C_4 في اللحظة المبينة بالرسم من العلاقة:

o o √√ o√

$$\underline{A}_{C_4} = \underline{A}^n_{C_4} + \underline{A}^t_{C_4} \qquad (y)$$

حيث:

$$A^n_{C_4} = \omega_4^2 R_{C_4 O_4} = (5.84)^2 (14.4) = 491.5 \text{ cm/s}^2$$

واتجاه المركبة $\underline{A}^n_{C_4}$ يكون من C_4 إلى O_4 كما هو موضح في شكل 9-19(c) ،
أما المركبة المماسة $\underline{A}^t_{C_4}$ فمقدارها مجهول ولكن اتجاهها عمودي على $C_4 O_4$.

والعجلة الظاهرية تتكون من ثلاث مركبات هي:

$$\underline{A}_{C_{2/4}} = \underline{A}^{n}_{C_{2/4}} + \underline{A}^{t}_{C_{2/4}} + \underline{A}^{c}_{C_2C_4} \quad (z)$$

حيث المركبة العمودية على المسار $\underline{A}^{n}_{C_{2/4}} = 0$ لأن المسار هو خــط مستقيم نصف قطر تقوسه $\rho = \infty$. أما مركبة كوريولس فمقدارها هو:

$$\underline{A}^{c}_{C_2C_4} = 2\ \omega_4\ V_{C_{2/4}} = 2(5.84)(159) = 1860\ cm/s^2$$

واتجاهها عمودي على المسار ويتحدد كما هو موضح في شكل 9–19(d) من ملاحظة أن ω_4 تميل إلى إدارة المتجه $\underline{V}_{C_{2/4}}$ عكس عقرب الساعة. أما المركبة المماسة $\underline{A}^{t}_{C_{2/4}}$ فمقدارها مجهول ولكن اتجاهها هو نفس اتجاه المسار الظاهري للنقطة C_2 على الضلع 4 أي الخط O_4D كما هو مبين في شكل 9–19(e) .

وبالتعويض من المعادلات (x,y,z) في المعادلة (w) نحصل على:

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{C_2}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^{t}_{C_2}} - (\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{C_4}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^{t}_{C_4}}) = (\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{C_{2/4}}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^{t}_{C_{2/4}}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^{c}_{C_2C_4}}) \quad (aa)$$

وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{A}^{t}_{C_{2/4}}$ ومقدار $\underline{A}^{t}_{C_4}$. ولحل المعادلة (aa) نرسم مضلع العجلة المبين في شكل 9–20(a):

* نختار نقطة أصل مناسبة O_A ومنها نرسم سهما طوله 5400 (بمقياس رسم مناسب) في شكل 9–20(a) ليمثل المركبة $\underline{A}^{n}_{C_2}$ موازيا للمتجه $\underline{R}_{C_2O_2}$ (وهو المتجه من O_2 إلى C_2 في شكل 9–19(a)) ولكن عكس اتجاهه وبذلك نكون قد عينا النقطة C''_2.

* من النقطة C''_2 نرسم سهما يمثل $\underline{A}^{c}_{C_2C_4}$ طوله 1860 (بنفس مقياس الرسم) كما هو مبين في شكل 9–20(a) وبذلك نكون قد عينا النقطة PP . ومن المهم جدا في هذه الحالة ملاحظة أن مركبة كوريولس $\underline{A}^{c}_{C_2C_4}$ تنتهي عند النقطة C''_2 ولا تبدأ عندها وذلك لأن العجلة الظاهرية $\underline{A}_{C_{2/4}}$ ومركباتها الثلاث تبدأ من النقطة C''_4 (وهي غير معينة بعد) وتنتهي عند النقطة C''_2 كما شرحنا ذلك باستفاضة في المثال السابق.

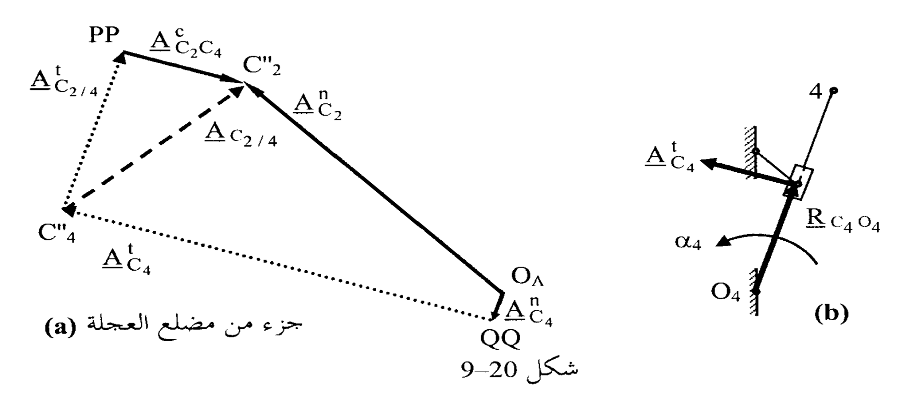
* من النقطة PP نرسم خطا متقطعا (مجهول الطول) عموديا على $\underline{A}^{c}_{C_2C_4}$ ليمثل $\underline{A}^{t}_{C_{2/4}}$.

* من نقطة الأصل $O_\wedge$ نرسم سهما طوله 491.4 (بنفس مقياس الرسم) ليمثل $\underline{A}^n_{C_4}$ في الاتجاه المبين في شكل 9–20(a) وبذلك نكون قد عينا النقطة QQ ، ومنها نرسم خطا متقطعا عموديا عليه (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}^t_{C_4}$.

* يتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة C''_4 وبذلك يكتمل مضلع العجلة، ومنه نوجد بالقياس (مع استعمال مقياس الرسم) من شكل 9–20(a)

$A^t_{C_4} = 6634\ cm/s^2$

$\underline{A}^t_{C_{2/4}} = 3015\ cm/s^2$



شكل 9–20

حيث تقاس المركبة $\underline{A}^t_{C_4}$ من النقطة QQ إلى النقطة C''_4 و تقاس المركبة $\underline{A}^t_{C_{2/4}}$ من النقطة C''_4 إلى النقطة PP . أما العجلة الظاهرية $\underline{A}_{C_{2/4}}$ فتقاس من النقطة C''_4 إلى النقطة C''_2 في شكل 9–20(a) ويكون مقدارها:

$A_{C_{2/4}} = 3542\ cm/s^2$

وتقاس العجلة المطلقة للنقطة C_4 ، أي $\underline{A}_{C_4}$ ، من النقطة $O_\wedge$ إلى النقطة C''_4 ويكون مقدارها:

$A_{C_4} = 6652\ cm/s^2$

وتحسب العجلة الزاوية للذراع 4 باستعمال المركبة $\underline{A}^t_{C_4}$:

$$\alpha_4 = A^t_{C_4} / R_{C_4 O_4} = 6634 / 14.4 = 460.7 \text{ rad/s}^2 \quad CCW$$

ونلاحظ أن اتجاه $\underline{\alpha}_4$ هو عكس اتجاه دوران عقرب الساعة (CCW) لأن المركبة $\underline{A}^t_{C_4}$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{C_4O_4}$ في عكس اتجاه عقرب الساعة كما هو مبين في شكل 9–20(b) .

ولإيجاد عجلة E والعجلة الزاوية للضلع 5 نحل الآلية الثانية O_4DE ونبدأ ذلك بحساب عجلة الوصلة D ويمكن ذلك باستعمال خواص صورة الذراع O_4D في مضلع العجلة لتعيين النقطة "D في المضلع كما هو مبين في شكل 9–21(a) :

$$\frac{O''_4\, C''_4}{O_4C} = \frac{O''_4\, D''}{O_4D}$$

$$A_D = O_4D'' = \frac{O''_4\, C''_4}{O_4C}\; O_4D = \frac{6652}{14.4}\; (27) = 12\;472.5 \text{ cm/s}^2$$

وبذلك يتم تعيين النقطة "D بحيث تقع على امتداد الخط $O_A\, C''_4$ وتبعد عن O_A بمقدار 12 472.5 (باستعمال نفس مقياس الرسم) كما هو موضح في شكل 9–21(a) . والآن ننسب عجلة الوصلة E إلى الوصلة D

$$\overset{0\,0}{\underline{A}_{ED}} = \overset{0\,\surd}{\underline{A}_E} - \overset{\surd\,\surd}{\underline{A}_D} \qquad \text{(ab)}$$

حيث اتجاه $\underline{A}_E$ (العجلة المطلقة للنقطة E) هو اتجاه حـــركة المنـــزلق كما هو موضح في شكل 9–19(a) بسهم ذو اتجاهين ، أما مركبات العجلة النسبية $\underline{A}_{ED}$ فهي:

$$\overset{0\,0}{\underline{A}_{ED}} = \overset{\surd\,\surd}{\underline{A}^n_{ED}} + \overset{0\,\surd}{\underline{A}^t_{ED}} \qquad \text{(ac)}$$

حيث مقدار المركبة العمودية $\underline{A}^n_{ED}$ هو:

$$A^n_{ED} = \omega_5^2\, R_{ED} = (1.57)^2\,(30) = 73.5 \text{ cm/s}^2$$

واتجاهها يكون من E إلى D كما هو موضح في شكل 9–19(a) ، أما المركبة المماسة $\underline{A}^t_{ED}$ فمقدارها مجهول ولكن اتجاهها عمودي على E D .

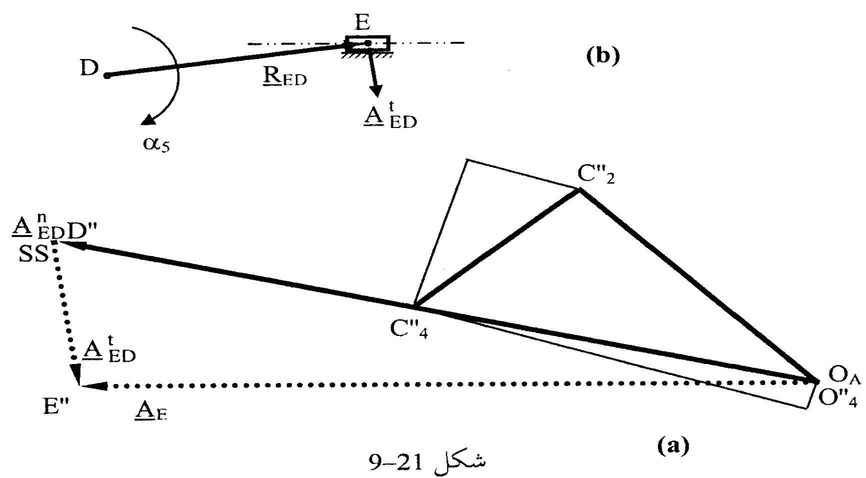
وبالتعويض من المعادلة (ac) في المعادلة (ab) نحصل على:

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{ED}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^{t}_{ED}} = \overset{0\surd}{\underline{A}_{E}} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{D}} \qquad \text{(ad)}$$

ويستكمل مضلع العجلة المبين في شكل 9–21(a) بحل المعادلة (ad) :

* من نقطة الأصل O_A نرسم خطا أفقيا (أي موازيا للعجلة $\underline{A}_E$) مجهول الطول يظهر في الشكل متقطعا لأن مقدار العجلة مجهول.

* من النقطة "D نرسم سهما يمثل $\underline{A}^{n}_{ED}$ طوله 73.5 (بنفس مقياس الرسم) كما هو مبين في شكل 9–21(a) (طول هذا السهم صغير جدا لأن هذه المركبة صغيرة بالنسبة لباقي المركبات) وبذلك نكون قد عينا النقطة SS ومنها نرسم خطا متقطعا (مجهول الطول) عموديا على $\underline{A}^{n}_{ED}$ ليمثل $\underline{A}^{t}_{ED}$.



شكل 21–9

* يتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة "E وبذلك يكتمل مضلع العجلة، ومنه نوجد بالقياس (مع استعمال مقياس الرسم) من شكل 9–21(a)

$A_E = 11\ 840\ cm/s^2$

$A^{t}_{ED} = 2800\ cm/s^2$

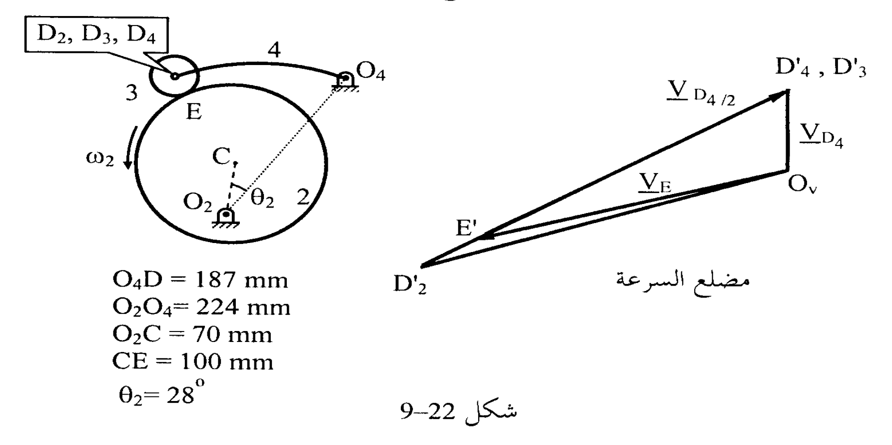
واتجاه عجلة المنـــزلق $\underline{A}_E$ ناحية اليسار (من O_A إلى "E) ، وتحسب العجلة الزاوية للذراع 5 باستعمال المركبة $\underline{A}^{t}_{ED}$ (وهي تقاس من SS إلى "E):

$\alpha_5 = A^{t}_{ED} / R_{ED} = 2800 / 30 = 93.4\ rad/s^2$ CW

ونلاحظ أن اتجاه $\underline{\alpha}_5$ هو مع اتجاه دوران عقرب الساعة (CW) لأن المركبة $\underline{A}^t_{ED}$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{ED}$ في مع اتجاه عقرب الساعة حول النقطة D كما هو مبين في شكل 9–21(b) .

مثال 9–8

شكل 9–22 يوضح الكامة الدائرية 2 التي نصف قطرها 100 mm والتابع المقوس 4 ذو العجلة roller follower . إذا كانت الكامة تدور بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 10$ rad/s ، احسب العجلة الزاوية للضلع 4 باستخدام طريقة الحركة الظاهرية علما بأن نصف قطر العجلة roller (ضلع 3) يساوي 30 mm .



شكل 9–22

الحل: كما وضح مثال 8–11 فإنه عند دوران الكامة 2 تتحرك عجلة التابع roller وهي الضلع 3 بحيث تكون الحركة الظاهرية لمركز العجلة 3 (D_3) على الكامة 2 هو قوس دائري موازي للكامة ومركزه هو النقطة C . وهناك نقطتان منطبقتان طول الوقت هما D_3 و D_4 حيث D_4 هي جزء من التابع 4 ثابت فيه ويتحرك معه، ويجب التفرقة بين النقطتين المنطبقتين لحظيا وهما D_2 و D_4 حيث D_2 هي جزء ثابت في الكامة ويتحرك معها.

ويوضح شكل 9–22 مضلع السرعة الذي تم الحصول عليه في مثال 8–11 ومنه

عينت قيم السرعات الآتية:

$V_{D_2} = 1900$ mm/s , $V_{D_4} = 500$ mm/s, $V_{D_{4/2}} = 2\ 100$ mm/s , $\omega_4 = 2.67$ rad/s CW

$V_E = 1610$ mm/s , $V_{E\,D_4} = 1810$ mm/s , $\omega_3 = 60.3$ rad/s CW

حيث النقطة E هي نقطة التلامس بين الكامة والتابع. ويمكننا أن ننسب عجلة النقطة D_4 إلى D_2 (وكلتا النقطتان تظهر في الشكل برمز واحد هو D) بمعادلة الحركة الظاهرية وهي:

$$\underline{A}_{D_{4/2}} = \underline{A}_{D_4} - \underline{A}_{D_2} \qquad \text{(ae)}$$

حيث $\underline{A}_{D_2}$ هي العجلة المطلقة للنقطة D_2 ، $\underline{A}_{D_4}$ هي العجلة المطلقة للنقطة D_4 ، أما $\underline{A}_{D_{4/2}}$ فهي العجلة الظاهرية ويوضح شكل 9–23(a) مركبات هذه العجلات. وتحسب $\underline{A}_{D_2}$ من العلاقة:

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{D_2}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{D_2}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^t_{D_2}}$$

حيث المركبتان العمودية والمماسة هما:

$$A^n_{D_2} = \omega_2^2 R_{D_2 O_2} = (10)^2 (190) = 19\ 000 \text{ mm/s}^2$$

$$A^t_{D_2} = \alpha_2 R_{D_2 O_2} = 0$$

وذلك لأن $\alpha_2 = 0$ لأن ω_2 منتظمة ، وحيث الطول $R_{D_2O_2} = 190$ mm يمكن قياسه من رسم دقيق للآلية أو حسابه من هندسة الشكل. وتحسب $\underline{A}_{D_4}$ من العلاقة:

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{D_4}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{D_4}} + \overset{\circ\surd}{\underline{A}^t_{D_4}}$$

حيث المركبة العمودية هي:

$$A^n_{D_4} = \omega_4^2 R_{D_4 O_4} = (2.67)^2 (187) = 1\ 333 \text{ mm/s}^2$$

أما المركبة المماسة $\underline{A}^t_{D_4}$ فهي مجهولة المقدار ولكن اتجاهها يكون عموديا على الخط O_4D_4 .

والعجلة الظاهرية لها ثلاث مركبات:

$$\underline{A}_{D_{4/2}} = \underline{A}^{n}_{D_{4/2}} + \underline{A}^{t}_{D_{4/2}} + \underline{A}^{c}_{D_4D_2}$$

حيث:

$$\underline{A}^{n}_{D_{4/2}} = V^2_{D_{4/2}} \div \rho = (2\ 100)^2 / (130) = 34\ 000\ \text{mm/s}^2$$

وهي المركبة العمودية على المسار واتجاهها من D_4 إلى C . ويلاحظ أن ρ هي نصف قطر المسار ، أي المسافة DC ومقدارها 130 mm. أما مركبة كوريولس فهي:

$$\underline{A}^{c}_{D_4D_2} = 2\ \omega_2\ V_{D_{4/2}} = 2(10)(2\ 100) = 42\ 000\ \text{mm/s}^2$$

وهي عمودية على المسار أيضا ولكن عكس اتجاه المركبة العمودية $\underline{A}^{n}_{D_{4/2}}$ ، ويتضح ذلك من شكل (b)23–9 الذي يظهر أن $\underline{\omega}_2$ تميل لإدارة متجه السرعة النسبية $\underline{V}_{D_{4/2}}$ عكس عقرب الساعة فتكون مركبة كوريولس $\underline{A}^{c}_{D_4D_2}$ في الاتجاه المبين. وبالتعويض في المعادلة (ae) نجد أن:

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{D_4}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^{t}_{D_4}} = (\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{D_2}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^{t}_{D_2}}) + (\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{D_{4/2}}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^{t}_{D_{4/2}}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^{c}_{D_4D_2}}) \qquad \text{(af)}$$

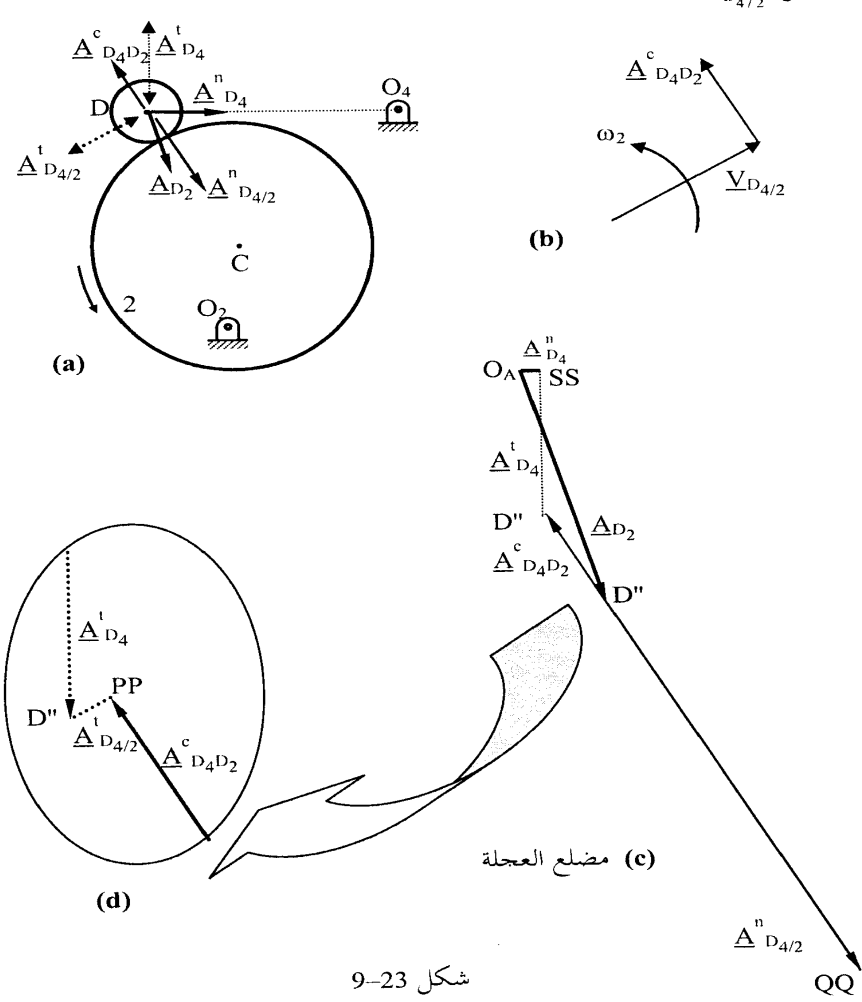
وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{A}^{t}_{D_{4/2}}$ ومقدار $\underline{A}^{t}_{D_4}$. ولحل المعادلة (af) نرسم مضلع العجلة المبين في شكل (c), (d)23–9:

* نختار نقطة أصل مناسبة O_A ومنها نرسم سهما طوله 19 000 (بمقياس رسم مناسب) في شكل (c)23–9 ليمثل المركبة $\underline{A}^{n}_{D_2}$ في الاتجاه من D إلى O_2 (أي موازيا للمتجه $\underline{R}_{D_2O_2}$ – وهو المتجه من O_2 إلى D في شكل (a)23–9 – ولكن عكس اتجاهه) وبذلك نكون قد عينا النقطة D''_2.

* من النقطة D''_2 نرسم سهما يمثل $\underline{A}^{n}_{D_{4/2}}$ طوله 34 000 (بنفس مقياس الرسم) موازي للخط DC كما هو مبين في شكل (c)23–9 وبذلك نكون قد عينا النقطة QQ ، ومنها نرسم سهما يمثل $\underline{A}^{c}_{D_4D_2}$ طوله 42 000 (بنفس مقياس الرسم) عكـــس اتجاه $\underline{A}^{n}_{D_{4/2}}$ (كما بين ذلك شكل (b)23–9) وبذلك نكون قد عينا النقطة PP (هذه النقطة موضحة في شكل (d)23–9 وهو تكبير لجزء من مضلع العجلة).

* من النقطة PP نرسم خطا متقطعا (مجهول الطول) عموديا على $\underline{A}^{c}_{D_4D_2}$

ليمثل $\underline{A}^t_{D_{4/2}}$.



شكل 23-9

* يتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة D''_4 وبذلك يكتمل مضلع العجلة، ومنه

نوجد بالقياس من النقطة SS إلى النقطة D''_4 (مع استعمال مقياس الرسم) من شكل 9–23(c)

$$A^t_{D_4} = 11\,340 \text{ mm/s}^2$$

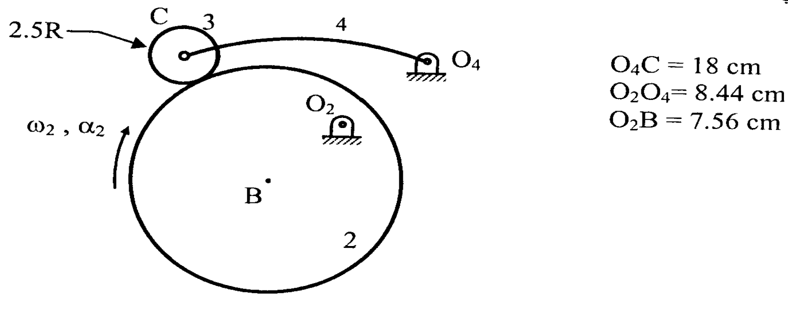
ومنها

$$\alpha_4 = A^t_{D_4} / R_{D_4 O_4} = 11340/187 = 60.64 \text{ rad/s}^2 \text{ CCW}$$

ملحوظة: يمكن أيضا حل هذه الآلية باستعمال الآلية الرباعية المكافئة ، والمثال التالي يوضح الطريقة لآلية مشابهة.

مثال 9–9

شكل 24–9 يوضح الكامة الدائرية 2 والتابع المقوس 4 ذو العجلة roller follower. والكامة نصف قطرها 10 cm وتدور بسرعة زاوية $\omega_2 = 3$ rad/s وعجلة زاوية $\alpha_2 = 2$ rad/s. احسب العجلة الزاوية للضلع 4 عندما تكون النقطة B وهي مركز الكامة على امتداد الخط O_2O_4 باستخدام طريقة الآلية الرباعية المكافئة.



شكل 24–9

الحل:

تتدحرج العجلة 3 على سطح الكامة (بانزلاق أو بدون انزلاق) وتظل المسافة BC ثابتة الطول ، وكذلك لا تتغير أطوال المسافات O_2B و CO_4 أثناء الحركة فتكون الآلية مكافئة في الحركة للآلية الرباعية المبينة في شكل 9–25(a) ولذلك يكون حلها لحساب الزوايا المجهولة والعجلات الزاوية إما باستخدام المعادلات أو باستعمال

الطرق العددية ، ولكن سيتم فيما يلي حل هذه الآلية بيانيا باستعمال الحركة النسبية. ويجدر أن نتذكر مرة أخرى أنه يمكن أيضا تحليل الآلية الأصلية المبينة في شكل 9–24 باستعمال الحركة الظاهرية كالمثال السابق.

يبين شكل 9–25(a) الآلية الرباعية المكافئة. ولتحليل العجلة يلزم أولا تحليل السرعة ولذلك نركز الانتباه على الوصلات لأنه بتعيين سرعاتها يمكن تعيين سرعة أي نقط أخرى بينها. ولأن سرعة ذراع الدوران O_2B معلومة نبدأ بإيجاد سرعة الوصلة B

$$V_B = \omega_2 R_{BO_2} = (3)(7.56) = 22.68 \text{ cm/s}$$

وهي عمودية على ذراع الدوران O_2B. والآن ننسب سرعة الوصلة C إلى B

$$\overset{0\,\surd}{\underline{V}_{CB}} = \overset{0\,0}{\underline{V}_C} - \overset{\surd\,\surd}{\underline{V}_B} \qquad \text{(ag)}$$

حيث اتجاه السرعة النسبية $\underline{V}_{CB}$ عمودي على الخط BC.

وهذه المعادلة تحتوي على ثلاثة مجاهيل فلا يمكن إيجادها بحل المعادلة ، ولذلك يجب أن نتخلص من أحد هذه المجاهيل. ويتم ذلك بنسبة سرعة الوصلة C إلى وصلة أخرى معلومة السرعة وتشاركها في نفس الضلع الجامد ، وهذه الصفات متوفرة في الوصلة O_4 :

$$\overset{0\,\surd}{\underline{V}_{CO_4}} = \overset{0\,0}{\underline{V}_C} - \overset{\surd\,\surd}{\underline{V}_{O_4}} \qquad \text{(ah)}$$

وبملاحظة أن $\underline{V}_{O_4} = 0$ وبالتعويض من (ah) في (ag) نحصل على:

$$\overset{0\,\surd}{\underline{V}_{CB}} = \overset{0\,\surd}{\underline{V}_{CO_4}} - \overset{\surd\,\surd}{\underline{V}_B}$$

حيث اتجاه $\underline{V}_{CO_4}$ عمودي على الخط CO_4 ، ولحل المعادلة (ai) نرسم مضلع السرعة المبين في شكل 9–25(b):

* نختار نقطة أصل مناسبة O_v ومنها نرسم سهما طوله 22.68 (بمقياس رسم مناسب) موازيا وفي اتجاه السرعة $\underline{V}_B$ (عموديا على ذراع الدوران O_2B) وبذلك نكون قد عينا النقطة 'B .

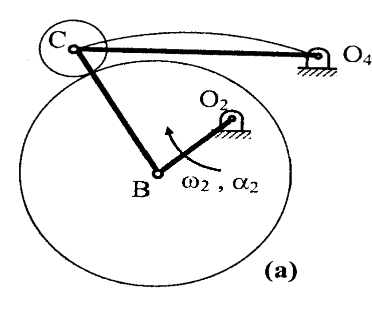
* النقطة O'_4 تكون منطبقة على O_v لأن سرعتها تساوي صفرا ، ومنها نرسم خطا عموديا على O_4C (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{CO_4}$) يظهر في الشكل متقطعا لأنه

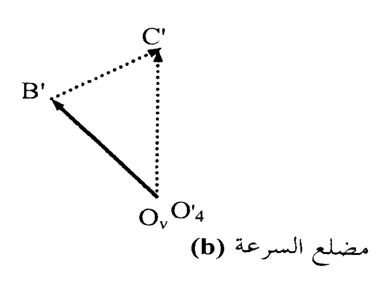
مجهول الطول.

* من 'B نرسم خطا متقطعا عموديا على BC (أي موازيا للسرعة $\underline{V}_{CB}$) ليتقاطع مع الخط المتقطع الآخر في النقطة 'C .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{V}_{CO_4}$ (وهو يساوي الطول من O_v إلى 'C مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{V}_{CB}$ (وهو يساوي الطول من 'B إلى 'C مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:

$V_{CO_4} = 25.52$ cm/s





مضلع السرعة (b)

شكل 25–9

$V_{CB} = 17.72$ cm/s

ويحسب مقدار ω_3 من العلاقة:

$$\omega_3 = \frac{V_{CB}}{R_{CB}} = \frac{17.72}{12.5} = 1.42 \text{ rad/s}$$

أما اتجاه ω_3 فهو في اتجاه عقرب الساعة. ويحسب مقدار ω_4 من العلاقة:

$$\omega_4 = \frac{V_{CO_4}}{R_{CO_4}} = \frac{25.52}{18} = 1.42 \text{ rad/s}$$

أما اتجاه ω_4 فهو مع عقرب الساعة أيضا.

ولتحليل العجلة نركز الانتباه على المفصلات hinges لأننا إذا أوجدنا عجلاتهما

يمكننا إيجاد عجلات النقط الأخرى بينها. ولأن سرعة وعجلة ذراع الدوران O_2B معلومتان نبدأ بإيجاد عجلة الوصلة B .

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_B} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_B} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^t_B} \qquad \text{(aj)}$$

$$A^n_B = \omega_2^2\ R_B = (3)^2\ (7.56) = 68.04\ cm/s^2$$

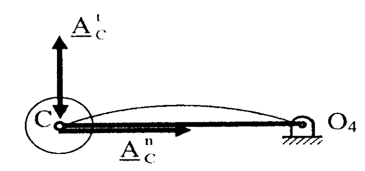
$$A^t_B = \alpha_2\ R_B = (2)\ (7.56) = 15.12\ cm/s^2$$

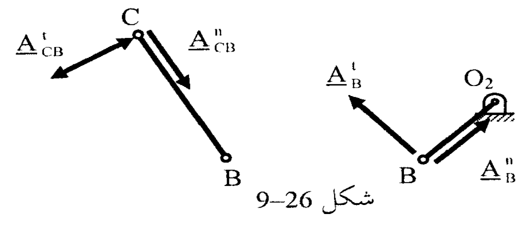
وهذه المركبات مبينة في شكل 26–9 . والآن ننسب عجلة الوصلة C إلى B :

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{CB}} = \overset{\circ\circ}{\underline{A}_C} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_B} \qquad \text{(ak)}$$

وتقع B هي والوصلة C على نفس الجسم الجامد 3 ، ولذلك يمكن باستعمال المعادلة (4–9) أن نحلل العجلة النسبية إلى مركباتها:

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{CB}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{CB}} + \overset{\circ\surd}{\underline{A}^t_{CB}} \qquad \text{(al)}$$





شكل 26–9

ومقدار المركبة المماسة للعجلة النسبية $\underline{A}^t_{CB}$ غير معلوم لأن α_3 غير معلومة لكنها عمودية على الضلع CB كما هو مبين في شكل 26–9 ، أما المركبة العمودية (المركزية) $\underline{A}^n_{CB}$ فهي:

$$A^n_{CB} = \omega_3^2\ R_{CB} = (1.42)^2\ (12.5) = 25.12\ cm/s^2$$

واتجاهها من C إلى B . وبدمج المعادلات (aj) , (ak) , (al)

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{CB}} + \overset{o\surd}{\underline{A}^{t}_{CB}} = \overset{oo}{\underline{A}_{C}} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{B}} \qquad \text{(am)}$$

وهذه المعادلة تحتوي على ثلاثة مجاهيل فلا يمكن إيجادها بحل المعادلة ، ولذلك يجب أن نتخلص من أحد هذه المجاهيل. ويتم ذلك بنسبة عجلة الوصلة C إلى وصلة أخرى معلومة العجلة وتشاركها في نفس الضلع الجامد ، وهذه الصفات متوفرة في الوصلة O_4 :

$$\overset{o\surd}{\underline{A}_{CO_4}} = \overset{oo}{\underline{A}_{C}} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{O_4}} \qquad \text{(an)}$$

وبملاحظة أن $\underline{A}_{O_4} = 0$ يكون:

$$\underline{A}_{C} = \underline{A}_{CO_4}$$

وتقع O_4 هي والوصلة C على نفس الجسم الجامد 4 ، ولذلك يمكن باستعمال المعادلة (9–4) أن نحلل العجلة النسبية $\underline{A}_{CO_4}$ (وهي تساوي $\underline{A}_{C}$) إلى مركباتها:

$$\overset{oo}{\underline{A}_{C}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{C}} + \overset{o\surd}{\underline{A}^{t}_{C}} \qquad \text{(ao)}$$

ومقدار المركبة المماسة للعجلة النسبية $\underline{A}^{t}_{C}$ غير معلوم لأن α_4 غير معلومة لكنها عمودية على الضلع CO_4 كما هو مبين في شكل 26–9 ، أما المركبة العمودية (المركزية) $\underline{A}^{n}_{C}$ فهي:

$$A^{n}_{C} = \omega_4^2\, R_{CO_4} = (1.42)^2\,(18) = 36.17 \text{ cm/s}^2$$

واتجاهها من C إلى O_4 . وبالتعويض نحصل على:

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{CB}} + \overset{o\surd}{\underline{A}^{t}_{CB}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{C}} + \overset{o\surd}{\underline{A}^{t}_{C}} - (\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{B}} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^{t}_{B}}) \qquad \text{(ap)}$$

وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{A}^{t}_{C}$ ومقدار $\underline{A}^{t}_{CB}$. ولحل المعادلة (ap) نرسم مضلع العجلة المبين في شكل (a)27–9:

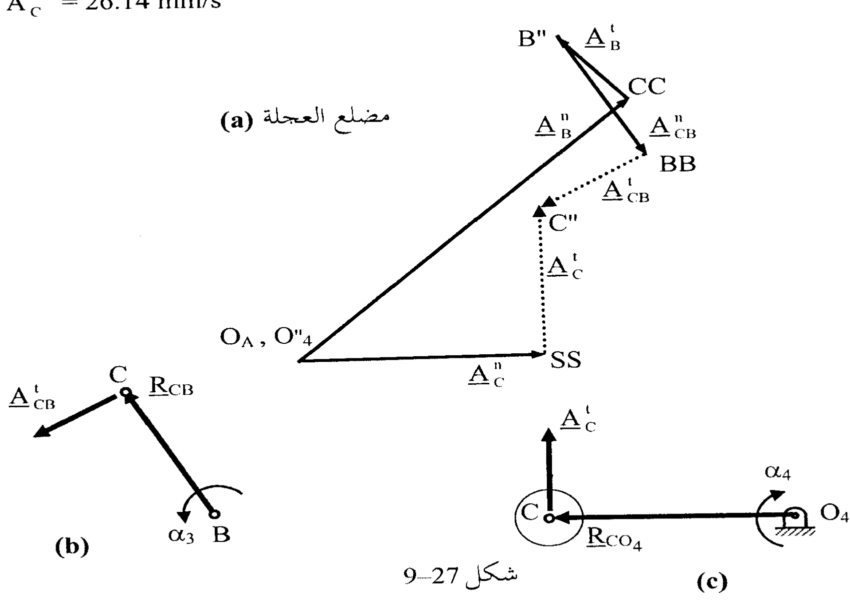
* نختار نقطة أصل مناسبة O_A ومنها نرسم سهما طوله 68.04 (بمقياس رسم مناسب) ليمثل $\underline{A}^{n}_{B}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة CC ومنها نرسم سهما طوله 15.12 موازيا للمتجه $\underline{A}^{t}_{B}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة "B. ومن النقطة "B نرسم سهما يمثل $\underline{A}^{n}_{CB}$ طوله 25.12 (بنفس مقياس الرسم) موازيا للمتجه $\underline{R}_{CB}$ ولكن عكس اتجاهه وبذلك نكون قد عينا النقطة BB ، ومنها نرسم خطا متقطعا عموديا

عليه (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}^t_{CB}$.

* من نقطة الأصل O_A نرسم سهما يمثل $\underline{A}^n_C$ طوله 36.17 (بنفس مقياس الرسم) موازيا للمتجه $\underline{R}_{CO_4}$ ولكن عكس اتجاهه وبذلك نكون قد عينا النقطة SS، ومنها نرسم خطا متقطعا عموديا عليه (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}^t_C$ فيتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة "C.

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{A}^t_C$ (وهو يساوي الطول من SS إلى "C مضروبا في مقياس الرسم) ، ومقدار $\underline{A}^t_{CB}$ (وهو يساوي الطول من BB إلى "C مضروبا في مقياس الرسم). فنجد أن مقدار المركبة المماسة $\underline{A}^t_C$ هو:

$$A^t_C = 26.14 \text{ mm/s}^2$$



شكل 27–9

أما مقدار المركبة المماسة $\underline{A}^t_{CB}$ فهو:

$$A^t_{CB} = 18.64 \text{ mm/s}^2$$

ومنها:

$\alpha_3 = \underline{A}^t_{CB} \ / R_{CB} \ = 18.64 / 12.5 \ = 1.49 \ \text{rad/s}^2 \ \text{CCW}$

$\alpha_4 = A^t_C \ / R_{CO_4} = \ 26.14 / 18 = 1.45 \ \text{rad/ s}^2 \ \text{CW}$

ونلاحظ أن اتجاه $\underline{\alpha}_3$ هو عكس اتجاه دوران عقرب الساعة لأن $\underline{A}^t_{CB}$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{CB}$ حول النقطة B في عكس اتجاه عقرب الساعة CCW كما هو مبين في شكل (b)27–9 ، وأن اتجاه $\underline{\alpha}_4$ هو في اتجاه دوران عقرب الساعة CW لأن $\underline{A}^t_C$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{CO_4}$ حول O_4 في اتجاه عقرب الساعة كما هو مبين في شكل (c)27–9 .

ملاحظة على معنى التكافؤ مع الآلية الرباعية: الضلع BC ليس ضلعا جامدا حقيقة كما هو الحال في الآلية الرباعية الحقيقية وإنما أمكن مكافئة آلية الكامة مع الآلية الرباعية لأن طول الضلع BC يظل ثابتا لمدة زمنية مما يمكننا من معاملة الخط BC كأنه ضلع جامد ، والمدة الزمنية التي يكون طول الضلع BC ثابتا تعتمد على شكل الضلعين المتماسين ، ففي المثال الحالي يكون طول الضلع BC ثابتا طوال الوقت لأن الضلعين 3 , 2 دائريان ولذلك لا تتغير أبعاد الآلية المكافئة مع الدوران . أما إذا كان أحد الضلعين أو كلاهما غير دائري فإن التكافؤ يكون لحظيا وتتغير المسافة BC مع دوران الكامة حسب تغير نصف قطر تقوس الضلعين. ولأن BC ليس ضلعا جامدا فعلا فإن نقطتي التلامس بين الضلعين 3 , 2 تكون لها عجلات مختلفة عن بعضها كما هو موضح فيما يلي.

9.5 التدحرج بدون انزلاق

شكل (a)28–9 يبين ضلع دائري 3 (عجلة) يتدحرج بدون انزلاق على ضلع مقوس 2 ويوضح أن التلامس بين العجلة والضلع يتم بين نقطة على العجلة (هي P_3) وبين نقطة على الضلع المقوس (هي P_2) ، وكلا الجسمين في الحالة العامة يدور بسرعة وعجلة زاوية مختلفة عن الآخر. ويجب أن تكون سرعة نقطة تلامس العجلة مع الضلع المقوس (النقطة P_3) مساوية لسرعة النقطة P_2 وهذا شرط كي تكون الحركة دحرجة بدون انزلاق. وتسمى النقطة P مركزا لحظيا للسرعة بين الضلعين 3 , 2 ، أي أن $\underline{V}_{P_3} = \underline{V}_{P_2}$. ولذلك تكون السرعة الظاهرية (النسبية) بين النقطتين

P_3 , P_2 تساوي صفرا ، أي أن:

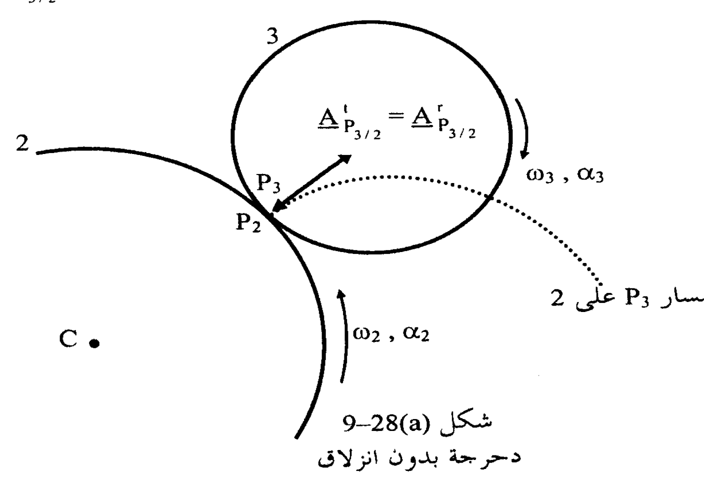
$$\underline{V}_{P_{3/2}} = \underline{V}_{P_3} - \underline{V}_{P_2} = 0$$

ويمكن إيجاد مسار النقطة P_3 على الضلع 2 برسم الضلع 3 في عدة مواضع أثناء دورانه بدون انزلاق على الضلع 2 وشكل 9-28(a) يبين مثالا على مسار P_3 على 2 والشكل الحقيقي لهذا المسار يعتمد على أنصاف أقطار تقوس كل من الضلعين عند نقطة التلامس ، ولكن بصرف النظر عن الشكل الفعلي للمسار فإن له خاصية مهمة وهي أن المماس له عند نقطة التلامس يكون عموديا على الضلعين (يقال لهذه الحالة أن المسار له cusp). وهذه الخاصية مفيدة عند كتابة معادلة العجلة الظاهرية : $\underline{A}_{P_{3/2}}$

$$\underline{A}_{P_{3/2}} = \underline{A}_{P_3} - \underline{A}_{P_2} = (\underline{A}^{n}_{P_{3/2}} + \underline{A}^{t}_{P_{3/2}} + \underline{A}^{c}_{P_3P_2})$$

وبملاحظة أن $V_{P_{3/2}} = 0$ تكون مركبات العجلة الظاهرية هي:

$$\underline{A}^{n}_{P_{3/2}} = V^2_{P_{3/2}} \div \rho = 0$$



شكل 9-28(a)
دحرجة بدون انزلاق

$$\underline{A}^{c}_{P_3P_2} = 2\,\omega_2\, V_{P_{3/2}} = 0$$

أي أن العجلة الظاهرية لها مركبة واحدة هي المركبة المماسة للمسار عند نقطة التلامس:

$\underline{A}_{P_{3/2}} = \underline{A}^t_{P_{3/2}}$

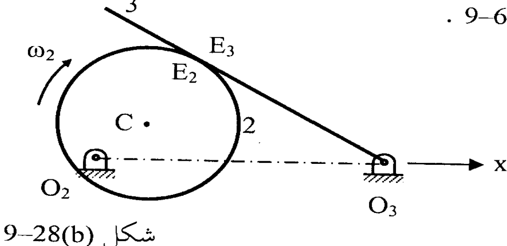
واتجاهها يكون عموديا على الضلعين عنـــد نقطة التلامس ، ولمنع الالتباس بين كـــون المركبة مماسة للمسار واتجاهها عمودي على الضلعين فإننا سنختار لهذه المركبة اسما مميزا هو المركبة القطرية radial acceleration ورمزها هو $\underline{A}^r_{P_{3/2}}$ ، أي أن:

$\underline{A}_{P_{3/2}} = \underline{A}^t_{P_{3/2}} = \underline{A}^r_{P_{3/2}}$

ومقدارها مجهول ولكن اتجاهها معروف وهو دائما اتجاه العمود المشترك للضلعين عند نقطة التلامس كما هو موضح في شكل 28–9 ، أي أن:

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{P_3}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{P_2}} + \overset{\circ\surd}{\underline{A}^r_{P_{3/2}}} \qquad (9\text{–}13)$$

ملحوظة: يبين شكل (b)28–9 حالة دحرجة مع انزلاق ، وفيها لا ترتبط نقطتي التلامس E_2 و E_3 بالعلاقة (13–9) وفي هذه الحالة يمكن إيجاد $\underline{A}_{E_2}$ من المبادئ الأولية لأن ω_2 و α_2 معلومتان. أما $\underline{A}_{E_3}$ فيمكن حسابها من المبادئ الأولية أيضا ولكن بعد تحليل السرعة والعجلة للآلية وإيجاد ω_3 و α_3 باستخدام المسار الظاهري كما في مثال 6–9 .



شكل (b)28–9

دحرجة الضلع 2 على 3 مع انزلاق

مثال 10–9

يدور الذراع O_2B المبين في شكل 29–9 بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 5$ rad/s عكس عقرب الساعة فتتدحرج العجلة الدائرية 4 على المستوى المائل بدون انزلاق. احسب عجلة النقطة C وكذلك العجلة الزاوية لكل من الذراع 3 والعجلة 4.

الحل: شكل (a)30–9 يبين مضلع السرعة الذي تم الحصول عليه في مثال 10–8 ومنه

$V_B = 510$ mm/s , $V_C = 650$ mm/s , $V_{CB} = 590$ mm/s ,

$\omega_3 = 2.58$ rad/s CW , $\omega_4 = 25.59$ rad/s CCW

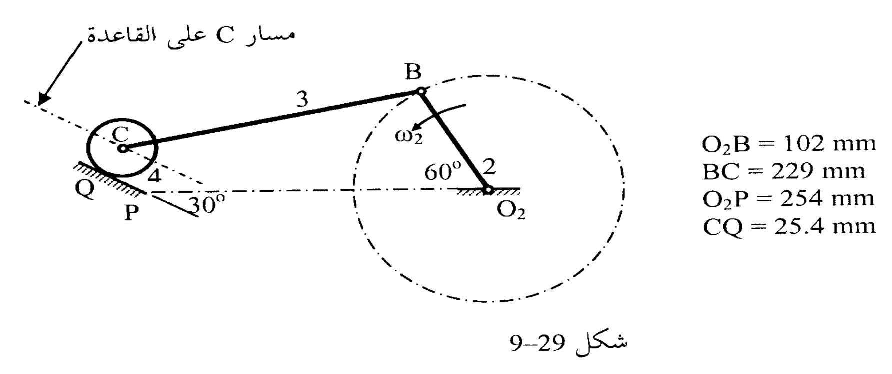
لتحليل العجلة نركز الانتباه على المفصلات hinges لأننا إذا أوجدنا عجلاتها يمكننا إيجاد عجلات النقط الأخرى بينها. ولأن سرعة وعجلة ذراع الدوران O_2B معلومتان نبدأ بإيجاد عجلة الوصلة B .

$$\overset{o\,o}{\underline{A}_B} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_B} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^t_B} \qquad \text{(aq)}$$

حيث

$$A^n_B = \omega_2^2\, R_{BO_2} = (5)^2\,(102) = 2550 \text{ mm/s}^2$$

وهي عكس اتجاه $\underline{R}_{BO_2}$ (أي في الاتجاه من B إلى O_2) .



شكل 9–29

$$A^t_B = \alpha_2\; R_B = 0$$

وذلك لأن $\alpha_2 = 0$ لأن ω_2 منتظمة. وعجلة الوصلة C مجهولة المقدار لكن اتجاهها يكون على خط موازي للقاعدة كما هو مبين في شكل 9–29 . ولأن الوصلة B معلومة العجلة مقدارا واتجاها ، ننسب عجلة الوصلة C إليها:

$$\overset{o\,o}{\underline{A}_{CB}} = \overset{o\,\surd}{\underline{A}_C} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_B} \qquad \text{(ar)}$$

وتقع B هي والوصلة C على نفس الجسم الجامد ، ولذلك يمكن باستعمال المعادلة (9–4) أن نحلل العجلة النسبية $\underline{A}_{CB}$ إلي مركباتها:

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{CB}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{CB}} + \overset{\circ\surd}{\underline{A}^{t}_{CB}} \quad \text{(as)}$$

ومقدار المركبة المماسة للعجلة النسبية $\underline{A}^{t}_{CB}$ غير معلوم لأن α_3 غير معلومة ، أما المركبة العمودية (المركزية) $\underline{A}^{n}_{CB}$ فإن اتجاهها هو من C إلى B أما مقدارها فهو:

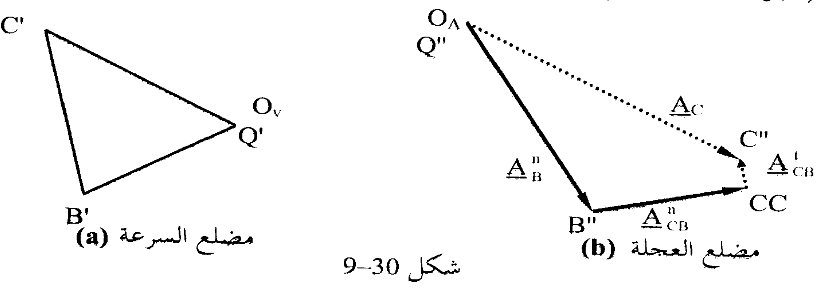
$$A^{n}_{CB} = V^{2}_{CB} / R_{CB} = (590)^2 /(229) = 1520 \text{ mm/s}^2$$

وبدمج المعادلات (aq) , (ar) , (as)

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{CB}} + \overset{\circ\surd}{\underline{A}^{t}_{CB}} = \overset{\circ\surd}{\underline{A}_{C}} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{B}} \quad \text{(at)}$$

وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{A}_{C}$ ومقدار $\underline{A}^{t}_{CB}$. ولحل المعادلة (at) نرسم مضلع العجلة المبين في شكل 9-30(b):

* نختار نقطة أصل مناسبة O_A ومنها نرسم سهما طوله 2550 (بمقياس رسم مناسب) ليمثل A^{n}_{B} وبذلك نكون قد عينا النقطة "B. ومن النقطة "B نرسم سهما يمثل $\underline{A}^{n}_{CB}$ طوله 1520 (بنفس مقياس الرسم) موازيا للمتجه $\underline{R}_{CB}$ ولكن عكس اتجاهه وبذلك نكون قد عينا النقطة CC ، ومنها نرسم خطا متقطعا عموديا عليه (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}^{t}_{CB}$.



مضلع السرعة (a) مضلع العجلة (b)

شكل 30-9

* من نقطة الأصل O_A نرسم خطا متقطعا على زاوية 30^o (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}_{C}$ ، فيتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة "C.

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{A}_{C}$ (وهو يساوي الطول من O_A إلى "C مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{A}^{t}_{CB}$ (وهو يساوي الطول من CC إلى "C مضروبا في مقياس الرسم) فنجد إن مقدار عجلة النقطة C هو:

$A_C = 3100\ mm/s^2$

واتجاهها إلى أسفل المنحدر. أما مقدار المركبة المماسة $\underline{A}^t_{CB}$ فهو:

$A^t_{CB} = 340\ mm/s^2$

ومنها:

$\alpha_3 = A^t_{CB} / R_{CB} = 340/229 = 1.49\ rad/s^2\ CW$

ونلاحظ أن اتجاه $\underline{\alpha}_3$ هو مع اتجاه دوران عقرب الساعة CW لأن $\underline{A}^t_{CB}$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{CB}$ حول النقطة B مع اتجاه عقرب الساعة.

لإيجاد العجلة الزاوية للضلع الدائري 4 ننسب عجلة نقطة التلامس Q_4 إلى عجلة النقطة C وهي معلومة مقدارا واتجاها (انظر شكل 31–9) :

$$\underline{A}_{CQ_4} = \underline{A}_C - \underline{A}_{Q_4} \qquad \text{(au)}$$

وبتطبيق المعادلة (13–9) بين نقطتي التلامس Q_4 و Q_1

$$\underline{A}_{Q_{4/1}} = \underline{A}^r_{Q_{4/1}} = \underline{A}_{Q_4} - \underline{A}_{Q_1}$$

أي أن:

$$\overset{0\,0}{\underline{A}_{Q_4}} = \overset{\surd\,\surd}{\underline{A}_{Q_1}} + \overset{0\,\surd}{\underline{A}^r_{Q_{4/1}}}$$

حيث $\underline{A}^r_{Q_{4/1}}$ هي المركبة القطرية كما هو مبين في شكل 31–9 . وبملاحظة أن $\underline{A}_{Q_1} = 0$

$$\overset{0\,0}{\underline{A}_{Q_4}} = \overset{0\,\surd}{\underline{A}^r_{Q_{4/1}}}$$

وبالتعويض في (au)

$$\underline{A}_{CQ_4} = \underline{A}_C - \underline{A}^r_{Q_{4/1}} \qquad \text{(av)}$$

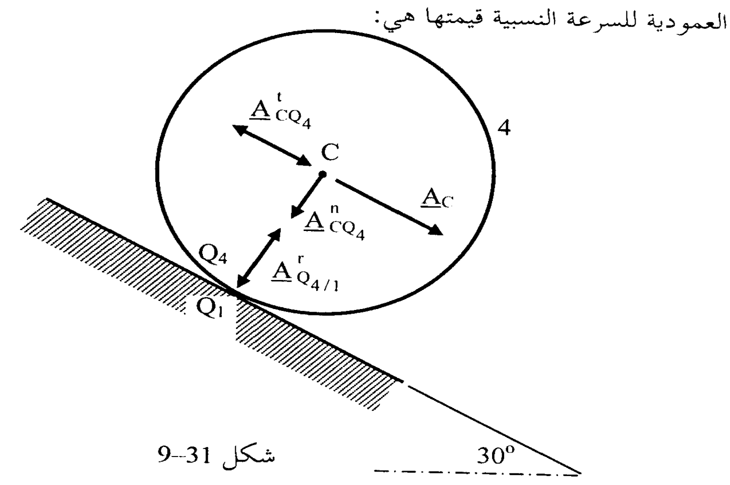
ولأن النقطتين Q_4 و C تقعان على ضلع جامد هو العجلة 4 فيمكن تحليل $\underline{A}_{CQ_4}$ إلى مركبتين:

$$\underline{A}_{CQ_4} = \underline{A}^n_{CQ_4} + \underline{A}^t_{CQ_4}$$

وبالتعويض في (av)

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{CQ_4}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^t_{CQ_4}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}_C} - \overset{0\surd}{\underline{A}^r_{Q_{4/1}}} \qquad \text{(aw)}$$

وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{A}^r_{Q_{4/1}}$ ومقدار $\underline{A}^t_{CQ_4}$ لأن المركبة العمودية للسرعة النسبية قيمتها هي:



شكل 31–9

$$A^n_{CQ_4} = (\omega_4)^2 R_{CQ_4} = (25.59)^2 (25.4) = 16\,633 \ \text{mm/s}^2$$

ولحل المعادلة (aw) نكمل مضلع العجلة المرسوم في شكل 30–9 كما هو مبين في شكل (a)32–9 حيث يلزم تغيير مقياس رسم العجلات الذي استعمل في شكل 30–9 لأن قيمة $\underline{A}^n_{CQ_4}$ أكبر بكثير من باقي القيم:

* من النقطة "C نرسم سهما يمثل $\underline{A}^n_{CQ_4}$ (موازيا لها) طوله 633 16 (بمقياس الرسم الجديد) كما هو مبين في شكل (a)32–9 وبذلك نكون قد عينا النقطة DD . ومن المهم جدا في هذه الحالة ملاحظة أن هذه المركبة تنتهي عند النقطة "C (ولا تبدأ عندها) وذلك لأن العجلة $\underline{A}_{CQ_4}$ ومركباتها تبدأ من النقطة Q''_4 (وهي غير معلومة بعد) وتنتهي عند النقطة "C ومن الناحية الرياضية فإن إعادة كتابة المعادلة (aw) على الصورة

$$\underline{A}^t_{CQ_4} = \underline{A}_C - \underline{A}^n_{CQ_4} - \underline{A}^r_{Q_{4/1}}$$

يبين بوضوح أن المركبة $\underline{A}^{n}_{CQ_4}$ يجب أن تطرح من العجلة $\underline{A}_C$ أي أن السهمين اللذين يمثلان هذين المتجهين يلتقيان عند النقطة "C وهذا ما يبينه شكل 9-32(a).

* من النقطة DD نرسم خطا متقطعا (مجهول الطول) عموديا على $\underline{A}^{n}_{CQ_4}$ ليمثل $\underline{A}^{t}_{CQ_4}$.

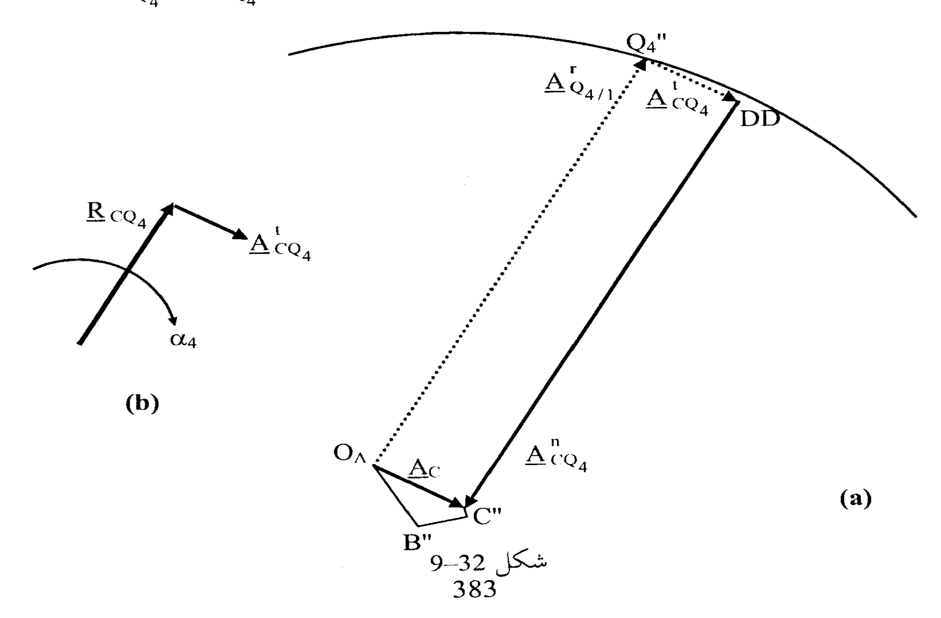
* من نقطة الأصل O_A نرسم خطا متقطعا (مجهول الطول) وموازيا للمركبة $\underline{A}^{r}_{Q_{4/1}}$.

* يتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة Q''_4 وبذلك يكتمل حل المعادلة (aw) ، ومن مضلع العجلة نوجد $A^{t}_{CQ_4}$ من شكل 9-32(a) بقياس الطول من Q''_4 إلى DD (مع استعمال مقياس الرسم):

$$A^{t}_{CQ_4} = 3100 \text{ mm/s}^2$$

ومنها

$$\alpha_4 = A^{t}_{CQ_4} / R_{CQ_4} = 3100/25.4 = 122 \text{ rad/s}^2 \text{ CW}$$



شكل 9-32

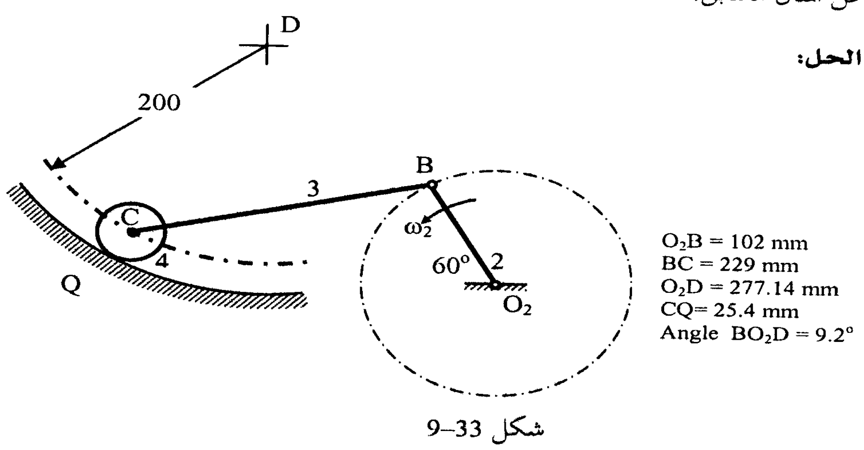
ونلاحظ أن اتجاه $\underline{\alpha}_4$ هو مع اتجاه دوران عقرب الساعة CW لأن $\underline{A}^t_{CQ_4}$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{CQ_4}$ حول النقطة O_4 مع اتجاه عقرب الساعة كما هو مبين في شكل 9-32(b).

ولاستكمال الحل يبين شكل 9-32(a) جزء من صورة الضلع 4 الدائري حيث صورته هي دائرة مركزها النقطة "C ونصف قطرها يساوي الطول $C''Q''_4$ ، وهذه الصورة للضلع تجعل من الممكن قياس عجلة أي نقطة على الضلع 4 من O_A إلى صورة النقطة المعنية ، ومثال ذلك عجلة النقطة Q_4 التي تقاس من O_A إلى Q''_4 (صـــورة النقطة المعنية) وقيمتها في هذه الحالة تساوي $16\ 633\ mm/s^2$.

مثال 9-11

أعد حل نفس الآلية إذا استبدل المستوى الذي تتدحرج عليه العجلة 4 بالقوس الدائري المبين في شكل 9-33 والذي مركزه D بحيث لا تتغير نقطة التلامس Q عن المثال السابق.

الحل:



شكل 9-33

يبين شكل 9-30(a) مضلع السرعة الذي تم الحصول عليه في مثال 8-10 وهو لا يتغير نتيجة لتدحرج العجلة 4 على القوس الدائري بدلا من المستوى ، ومنه

$V_B = 510\ mm/s$, $V_C = 650\ mm/s$, $V_{CB} = 590\ mm/s$,

$\omega_3 = 2.58$ rad/s , CW , $\omega_4 = 25.59$ rad/s CCW

تحليل العجلات في هذه الآلية لا يختلف عن السابقة إلا في عجلة النقطة C لأنها تتحرك على قوس دائري بدلا من خط مستقيم ، ولهذا تنطبق المعادلة (at) :

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{CB}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^t_{CB}} = \overset{00}{\underline{A}_C} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_B} \qquad \text{(at)}$$

ويجب ملاحظة أن هناك نقطتين C_3 , C_4 منطبقتان في كل الأوقات حيث نقطة C_3 هي جزء لا يتجزأ من الضلع 3 ثابتة فيه وتتحرك معه بينما C_4 هي جزء من العجلة 4 . ولابد من التفرقة بين هاتين النقطتين (أي C_3 , C_4) وبين نقطة أخرى هي C_1 منطبقة على C_4 في اللحظة المبينة بالرسم ولكنها جزء لا يتجزأ من القاعدة 1 . وبعد مرور فترة زمنية قصيرة، تتحرك C_4 مع الضلع 4 بينما تظل C_1 ساكنة مع القاعدة 1 وتنفصل النقطتان عن بعضهما. ويكون مسار C_4 على القاعدة هو القوس الدائري الذي مركزه D ونصف قطره 200 mm ويظهر في شكل 33–9 كقوس متقطع. وبمعرفة مسار C_4 على القاعدة 1 يمكن كتابة معادلة العجلة الظاهرية:

$$\underline{A}_{C_{4/1}} = \underline{A}^n_{C_{4/1}} + \underline{A}^t_{C_{4/1}} + \underline{A}^c_{C_4C_1} \qquad \text{(ax)}$$

وبملاحظة أن $\omega_1 = 0$ لأن القاعدة لا تدور تكون:

$$\underline{A}^c_{C_4C_1} = 2\,\omega_1 V_C = 0$$

وبملاحظة أن أي عجلة منسوبة إلى القاعدة هي عجـــلة مطـــلقة ، أي أن $\underline{A}_C =$ $\underline{A}_{C_{4/1}}$ ، وبذلك يمكن إسقاط الأرقام 4 , 1 من المعادلة (ax) لتكون:

$$\overset{00}{\underline{A}_C} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_C} + \overset{0\surd}{\underline{A}^t_C} \qquad \text{(ay)}$$

ومقدار المركبة المماسة للعجلة النسبية $\underline{A}^t_C$ غير معلوم لكنها مماسة للمسار ، أي عمودية على الخط CD كما هو مبين في شكل 34(a)–9 ، أما المركبة العمودية (المركزية) $\underline{A}^n_C$. فهي:

$$A^n_C = V^2_C / R_{CD} = (650)^2 / (200) = 2110 \text{ mm/s}^2$$

وهي متجهة من C إلى D . وبالتعويض من (ay) في (at)

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{CB}} + \overset{o\surd}{\underline{A}^{t}_{CB}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{C}} + \overset{o\surd}{\underline{A}^{t}_{C}} - \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{B}} \qquad \text{(az)}$$

وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{A}^{t}_{C}$ ومقدار $\underline{A}^{t}_{CB}$. ولحل المعادلة (az) نرسم مضلع العجلة المبين في شكل 9–34(b) وفيه يتم تعيين النقط "B و CC كما في المثال السابق ، ومن النقطة CC نرسم خطا متقطعا عموديا علي "CC B (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}^{t}_{CB}$. ومن نقطة الأصل O_A نرسم سهما طوله 2110 (بنفس مقياس الرسم) موازيا للمتجه $\underline{A}^{n}_{C}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة DD ، ومنها نرسم خطا متقطعا (مجهول الطول) وموازيا للمركبة $\underline{A}^{t}_{C}$ ، فيتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة "C. نقيس من الرسم مقدار $\underline{A}^{t}_{C}$ (وهو يساوي الطول من DD إلى "C مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{A}^{t}_{CB}$ (وهو يساوي الطول من CC إلى "C مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن مقدار العجلة المماسة للنقطة C هو:

$A^{t}_{C} = 1227 \text{ mm/s}^2$

واتجاهها إلى أسفل المنحدر. أما مقدار المركبة المماسة $\underline{A}^{t}_{CB}$ فيقاس من CC إلى "C وهو:

$A^{t}_{CB} = 3165 \text{ mm/s}^2$

ومنها:

$\alpha_3 = A^{t}_{CB} / R_{CB} = 3165/229 = 13.82 \text{ rad/s}^2 \text{ CW}$

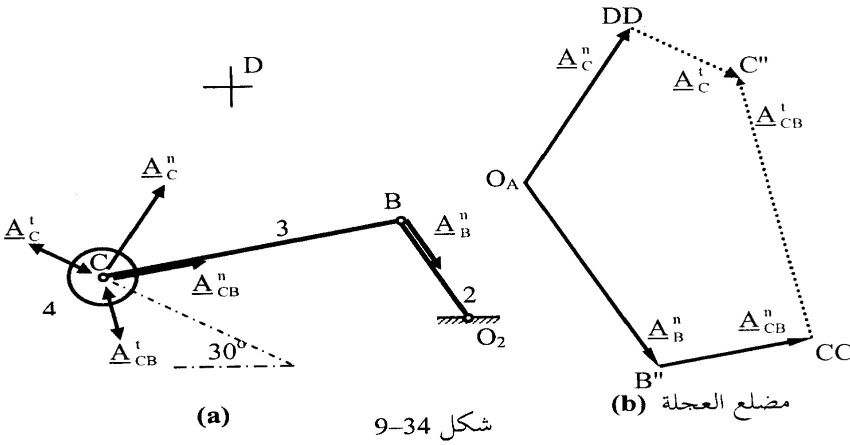
ونلاحظ أن اتجاه $\underline{\alpha}_3$ هو مع اتجاه دوران عقرب الساعة CW لأن $\underline{A}^{t}_{CB}$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{CB}$ حول النقطة B مع اتجاه عقرب الساعة.

ملحوظة: يمكن الحصول على نفس النتائج السابقة بحل الآلية المكافئة وهي في هذه الحالة الآلية الرباعية O_2BCD . ويمكن تحليل هذه الآلية الرباعية المكافئة بطريقة العجلة النسبية فنحصل على نفس مضلع العجلة المبين في شكل 9–34(b) وكذلك يمكن تحليل هذه الآلية المكافئة بالطرق العددية أو الهندسية.

لإيجاد العجلة الزاوية للضلع الدائري 4 ننسب عجلة نقطة التلامس Q_4 (شكل 9–35) إلى عجلة النقطة C كما في المثال السابق حتى نصل إلى المعادلة (aw)

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_{CQ_4}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^t_{CQ_4}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}_C} - \overset{0\surd}{\underline{A}^r_{Q_{4/1}}} \qquad \text{(aw)}$$

حيث $\underline{A}^r_{Q_{4/1}}$ هي المركبة القطرية كما هو مبين في شكل 35–9 ، وحيث عجلة النقطة C هي:



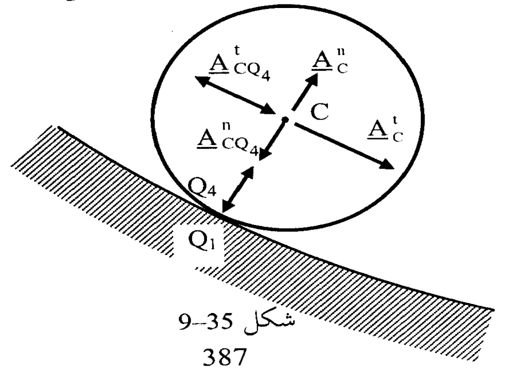
شكل 34–9

$$\overset{00}{\underline{A}_C} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}^n_C} + \overset{\surd\surd}{\underline{A}^t_C} \qquad \text{(ay)}$$

والمركبة العمودية للسرعة النسبية $\underline{A}^n_{CQ_4}$ هي:

$$A^n_{CQ_4} = (\omega_4)^2 R_{CQ_4} = (25.59)^2 (25.4) = 16\ 633 \ \ mm/s^2$$

واتجاهها يكون من C إلى Q_4 كما هو مبين في شكل 35–9 .



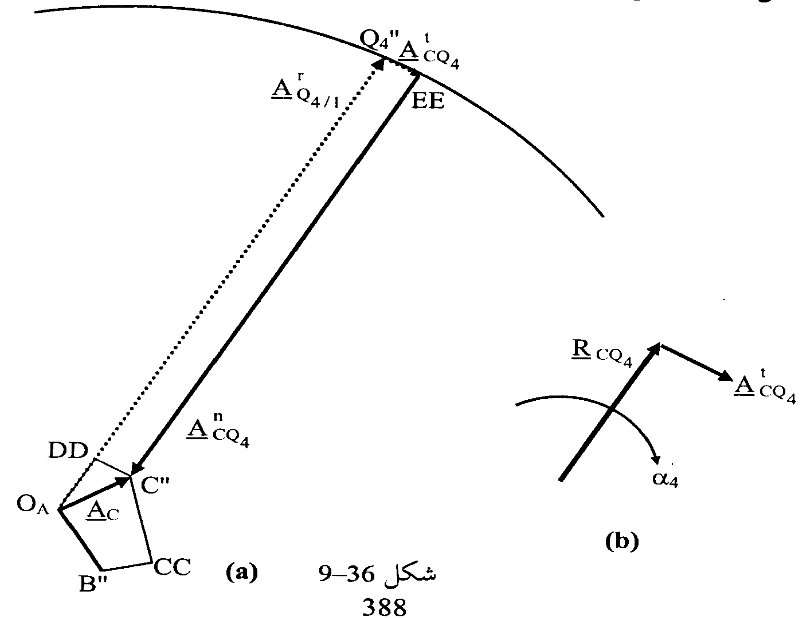
شكل 35–9

ولحل المعادلة (aw) نكمل مضلع العجلة المرسوم في شكل (b)34–9 كما هو مبين في شكل (a)36–9 حيث يلزم تغيير مقياس رسم العجلات لأن قيمة $\underline{A}^{n}_{CQ_4}$ أكبر بكثير من باقي القيم:

* من النقطة "C نرسم سهما يمثل $\underline{A}^{n}_{CQ_4}$ (موازيا لها) طوله 633 16 (بمقياس الرسم الجديد) كما هو مبين في شكل (a)32–9 وبذلك نكون قد عينا النقطة EE . ومن المهم جدا في هذه الحالة ملاحظة أن هذه المركبة تنتهي عند النقطة "C (ولا تبدأ عندها) وذلك لأن العجلة $\underline{A}_{CQ_4}$ ومركباتها تبدأ من النقطة "Q4 (وهي غير محددة بعد) وتنتهي عند النقطة "C ومن الناحية الرياضية فإن إعادة كتابة المعادلة (aw) على الصورة

$$\underline{A}^{t}_{CQ_4} = \underline{A}_{C} - \underline{A}^{n}_{CQ_4} - \underline{A}^{r}_{Q_{4/1}}$$

يبين بوضوح أن المركبة $\underline{A}^{n}_{CQ_4}$ يجب أن تطرح من العجلة $\underline{A}_C$ أي أن السهمين اللذين يمثلان هذين المتجهين يلتقيان عند النقطة "C وهذا ما يبينه شكل (a)36–9.



(a) شكل 36–9

* من النقطة EE نرسم خطا متقطعا (مجهول الطول) عموديا على $\underline{A}^{n}_{CQ_4}$ ليمثل $\underline{A}^{t}_{CQ_4}$.

* من نقطة الأصل O_A نرسم خطا متقطعا (مجهول الطول) وموازيا للمركبة $\underline{A}^{r}_{Q_{4/1}}$.

* يتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة Q''_4 وبذلك يكتمل حل المعادلة (aw) ، ومنه نوجد بالقياس (مع استعمال مقياس الرسم) من شكل 9–36(a)

$A^{t}_{CQ_4} = 1227\ mm/s^2$

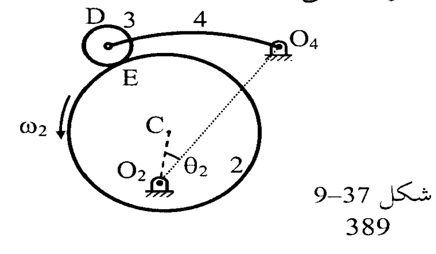
$\alpha_4 = A^{t}_{CQ_4} / R_{CQ_4} = 1227/25.4 = 48.3\ rad/s^2$ CW

ونلاحظ أن اتجاه $\underline{\alpha}_4$ هو مع اتجاه دوران عقرب الساعة CW لأن $\underline{A}^{t}_{CQ_4}$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{CQ_4}$ مع اتجاه عقرب الساعة كما هو مبين في شكل 9–36(b).

ولاستكمال الحل يبين شكل 9–36(a) جزء من صورة الضلع 4 الدائري حيث صورته هي دائرة مركزها النقطة C'' ونصف قطرها يساوي الطول $C''\ Q''_4$ ، وهذه الصورة للضلع تجعل من الممكن قياس عجلة أي نقط على الضلع 4 من O_A إلى صورة النقطة المعنية ، ومثال ذلك عجلة النقطة Q_4 التي تقاس من O_A إلى Q''_4 وقيمتها في هذه الحالة تساوي $18\ 743\ mm/s^2$.

مثال 12–9

شكل 37–9 يوضح الكامة الدائرية 2 التي نصف قطرها 100 mm والتابع المقوس 4 ذو العجلة roller follower . إذا كانت الكامة تدور بسرعة زاوية منتظمة $\omega_2 = 10$ rad/s ، احسب العجلة الزاوية للعجلة roller 3 علما بأن نصف قطرها يساوي 30 mm وأنها تتدحرج بدون انزلاق على الكامة.



$O_4D = 187$ mm
$O_2O_4 = 224$ mm
$O_2C = 70$ mm
$O_4E = 161$ mm
$\theta_2 = 28^{o}$

شكل 37–9

الحل:

تختلف هذه الحالة عن المثالين السابقين في أن كلا الضلعين المتلامسين يدور وهذا لا يؤثر كثيرا على طريقة الحل كما هو موضح فيما يلي.

مركز العجلة الدائرية 3 هو النقطة D ، وفي الواقع هناك نقطتان منطبقتان طول الوقت هما D_4 التي هي جزء من الضلع 4 ، والأخرى هي D_3 وهي مركز العجلة 3 وسرعة وعجلة هاتان النقطتان متساويتان دائما لأنهما منطبقتان طول الوقت ولذلك سنكتفي هنا بكتابة الرمز D فقط علما بأننا في هذا المثال نعني به النقطة D_3 .

من مثال 8–9 حصلنا على النتائج التالية (انظر شكل 38–9):

$\omega_3 = 60.3$ rad/s CW , $\underline{A}^n_D = 1\ 333$ mm/s^2 , $\underline{A}^t_D = 11\ 340$ mm/s^2

لإيجاد العجلة الزاوية للضلع الدائري 3 ننسب عجلة نقطة التلامس E_3 إلى عجلة النقطة D المعلومة مقدارا واتجاها (انظر شكل 38–9) :

$$\underline{A}_{DE_3} = \underline{A}_D - \underline{A}_{E_3} \qquad \text{(ba)}$$

وبتطبيق المعادلة (13–9) بين نقطتي التلامس E_3 و E_2

$$\overset{\circ\circ}{\underline{A}_{E_3}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{E_2}} + \overset{\circ\surd}{\underline{A}^r_{E_{3/2}}}$$

حيث $\underline{A}^r_{E_{3/2}}$ هي المركبة القطرية كما هو مبين في شكل 38–9 . وبالتعويض في (ba)

$$\underline{A}_{DE_3} = \underline{A}_D - (\underline{A}_{E_2} + \underline{A}^r_{E_{3/2}}) \qquad \text{(bb)}$$

ويلاحظ أن مركبات $\underline{A}_D$ معلومة (انظر شكل 38–9) حيث:

$$\underline{A}_D = \underline{A}^n_D + \underline{A}^t_D$$

ويمكن تحليل $\underline{A}_{E_2}$ إلى مركباتها:

$$\underline{A}_{E_2} = \underline{A}^n_{E_2} + \underline{A}^t_{E_2}$$

حيث

$$\underline{A}^n_{E_2} = (\omega_2)^2 R_{E_2O_2} = (10)^2 (161) = 16\ 102 \text{ mm/s}^2$$

واتجاه المركبة العمودية $\underline{A}^n_{E_2}$ يكون من E_2 إلى O_2 كما هو مبين في شكل

. 9–38

$\underline{A}^{t}_{E_2} = \alpha_2 R_{E_2O_2} = 0$

وذلك لأن $\alpha_2 = 0$ لأن ω_2 منتظمة.

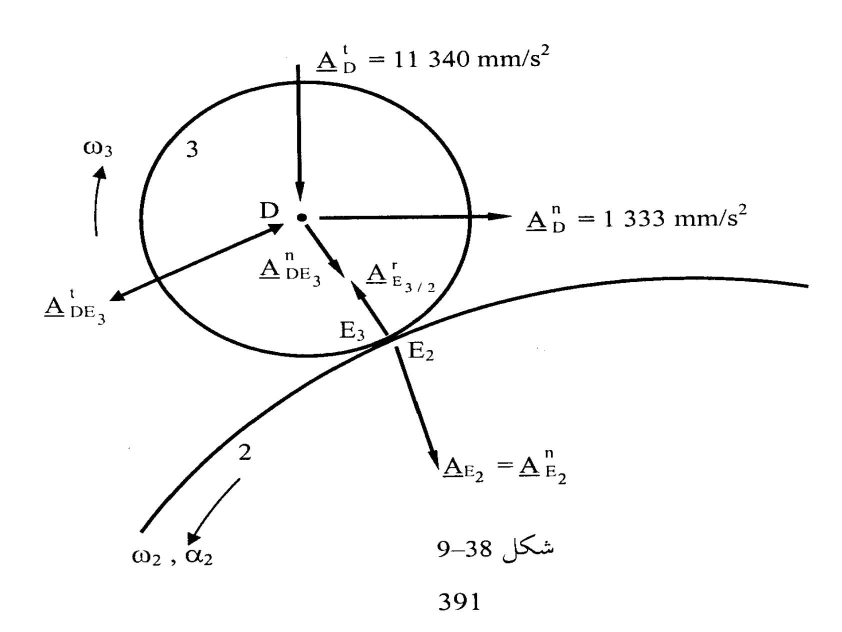
ولأن النقطتين E_3 و D تقعان على ضلع جامد هو العجلة 3 فيمكن تحليل $\underline{A}_{DE_3}$ إلى مركبتين:

$$\underline{A}_{DE_3} = \underline{A}^{n}_{DE_3} + \underline{A}^{t}_{DE_3}$$

وبالتعويض في (bb)

$$\overset{\surd\surd}{\underline{A}^{n}_{DE_3}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^{t}_{DE_3}} = \overset{\surd\surd}{\underline{A}_{D}} - (\overset{\surd\surd}{\underline{A}_{E_2}} + \overset{0\surd}{\underline{A}^{r}_{E_{3/2}}}) \qquad \text{(bc)}$$

وفي هذه المعادلة مجهولان فقط هما مقدار $\underline{A}^{t}_{DE_3}$ ومقدار $\underline{A}^{r}_{E_{3/2}}$ لأن المركبة العمودية $\underline{A}^{n}_{DE_3}$ قيمتها هي:



شكل 9–38

$$A^{n}_{DE_3} = (\omega_3)^2 R_{DE_3} = (60.3)^2 (30) = 109\ 083 \ \ mm/s^2$$

ولحل المعادلة (bc) نرسم مضلع العجلة كما هو مبين في شكل 39-9 :

* نختار نقطة أصل مناسبة O_A ومنها نرسم سهما طوله 333 1 (بمقياس رسم مناسب) ليمثل $\underline{A}^{n}_{D}$ وبذلك نكون قد عينا النقطة SS. ومن النقطة SS نرسم سهما يمثل $\underline{A}^{t}_{D}$ طوله 340 11 (بنفس مقياس الرسم) وبذلك نكون قد عينا النقطة "D ، ومنها نرسم سهما يمثل $\underline{A}^{n}_{DE_3}$ (موازيا لها) طوله 083 109 وبذلك نكون قد عينا النقطة QQ (الشكل يبين جزء من السهم فقط لأن مقدار هذه المركبة كبير جدا بحيث يخرج السهم الذي يمثلها خارج حيز الورقة). ومن المهم جدا في هذه الحالة ملاحظة أن هذه المركبة تنتهي عند النقطة "D (ولا تبدأ عندها) وذلك لأن العجلة $\underline{A}_{DE_3}$ ومركباتها تبدأ من النقطة E''_3 وتنتهي عند النقطة "D ومن الناحية الرياضية فإن إعادة كتابة المعادلة (bc) على الصورة

$$\underline{A}^{t}_{DE_3} + (\underline{A}_{E_2} + \underline{A}^{r}_{E_{3/2}}) = \underline{A}_D - \underline{A}^{n}_{DE_3}$$

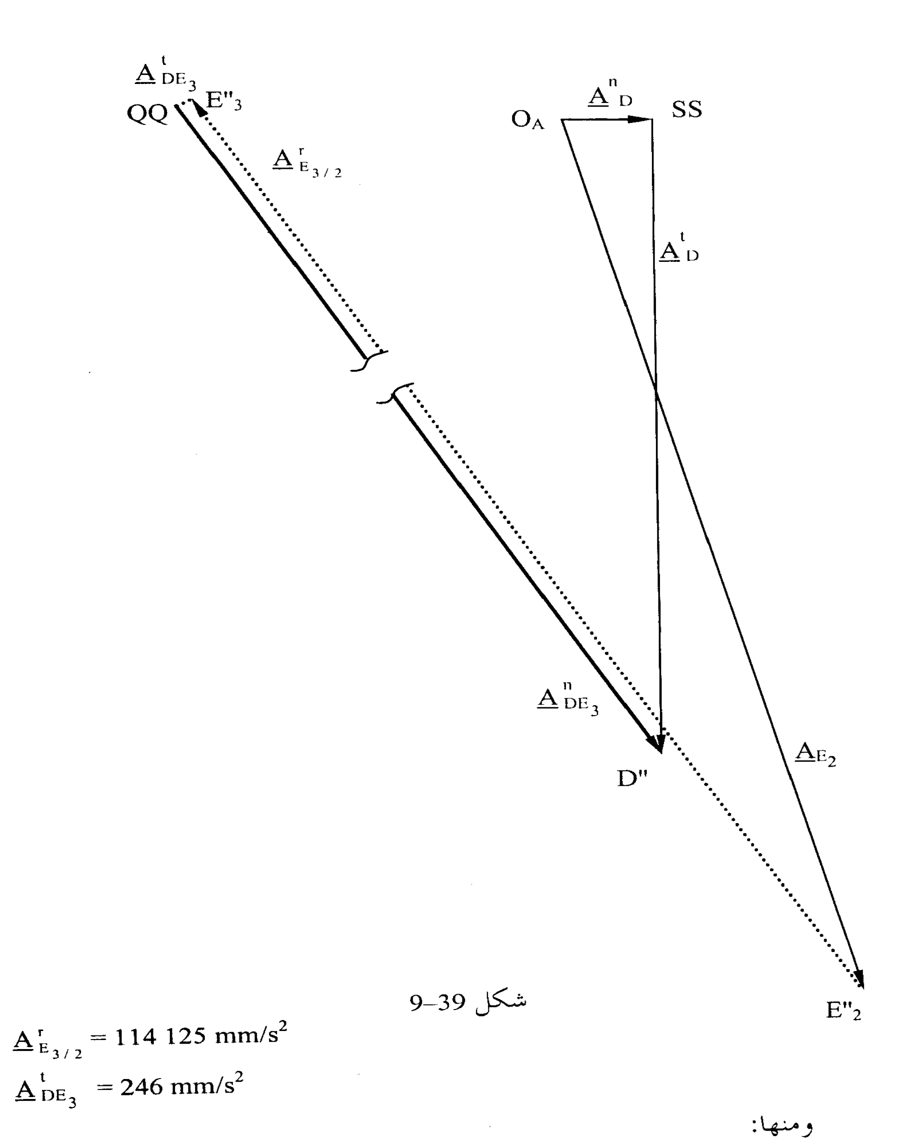
يظهر بوضوح أن المركبة $\underline{A}^{n}_{DE_3}$ مطروحة من المتجه $\underline{A}_D$ أي أن السهمين اللذين يمثلان هذين المتجهين يلتقيان عند النقطة "D كما هو مبين في شكل 39-9 .

* من نقطة الأصل O_A نرسم سهما يمثل $\underline{A}_{E_2}$ (موازيا للخط الواصل من E_2 إلى O_2) طــوله 102 16 (بنفس مقياس الرسم) كما هو مبين في شكل 39-9 وبذلك نكون قد عينا النقطة E''_2 .

* من E''_2 نرسم خطا متقطعا (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}^{r}_{E_{3/2}}$ (موازيا للخط الواصل بين مركزي الكامة وعجلة التابع).

* من النقطة QQ نرسم خطا متقطعا عموديا علي المركبة $\underline{A}^{n}_{DE_3}$ (مجهول الطول) ليمثل $\underline{A}^{t}_{DE_3}$ فيتقاطع الخطان المتقطعان في النقطة E''_3 .

* نقيس من الرسم مقدار $\underline{A}^{t}_{DE_3}$ (وهو يساوي الطول من E''_3 إلى QQ مضروبا في مقياس الرسم) ومقدار $\underline{A}^{r}_{E_{3/2}}$ (وهو يساوي الطول من E''_2 إلى E''_3 مضروبا في مقياس الرسم) فنجد أن:



شكل 9–39

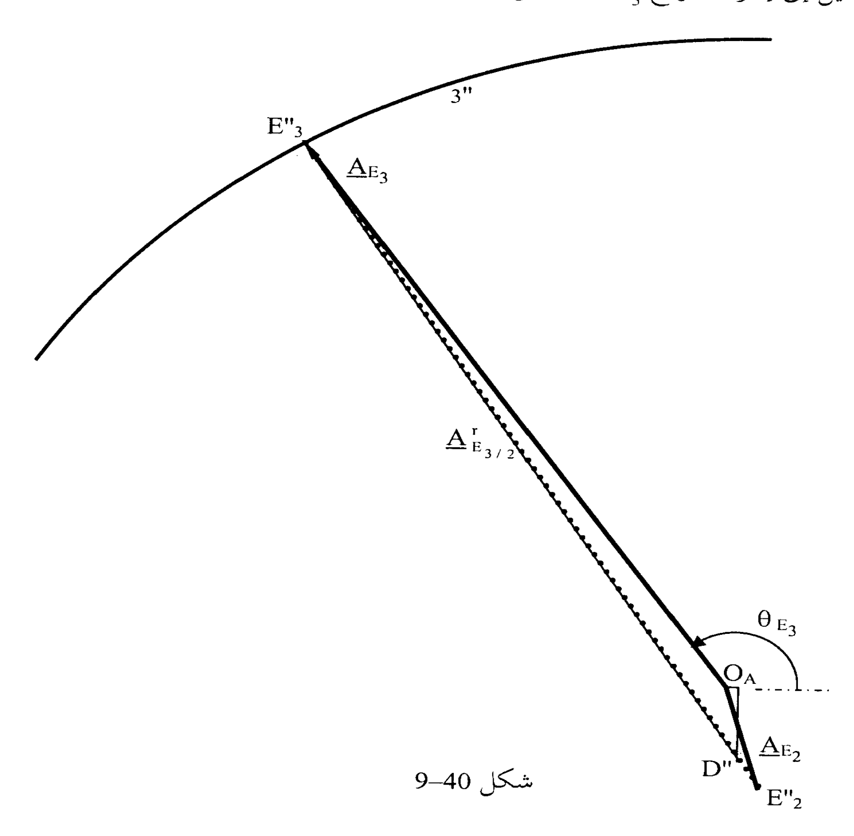
$\underline{A}^{r}_{E_{3/2}} = 114\,125 \text{ mm/s}^2$

$\underline{A}^{t}_{DE_3} = 246 \text{ mm/s}^2$

ومنها:

$\alpha_3 = \underline{A}^{t}_{DE_3} \; / \; R_{DE_3} = 246/30 \; = 8.2 \text{ rad/s}^2$ CCW

ونلاحظ أن اتجاه $\underline{\alpha}_3$ هو عكس اتجاه دوران عقرب الساعة CCW لأن $\underline{A}^{t}_{DE_3}$ تميل إلى إدارة الذراع $\underline{R}_{DE_3}$ عكس اتجاه عقرب الساعة.



شكل 40–9

ولاستكمال الحل أعدنا رسم مضلع العجلة بمقياس رسم مختلف حتى يظهر المتجه $\underline{A}^{r}_{E_{3/2}}$ بالكامل داخل حدود الورقة وذلك في شكل 40–9 ، وفيه يظهر جزء من صورة الضلع الدائري 3 حيث صورته هي دائرة مركزها النقطة "D ونصف قطرها

يساوي الطول $D''E''_3$. وهذه الصورة للضلع 3 تجعل من الممكن قياس عجلة أي نقطة على الضلع 3 من O_A إلى صورة النقطة المعنية ، ومثال ذلك عجلة النقطة E_3 (أي $\underline{A}_{E_3}$) التي تقاس من O_A إلى E''_3 وقيمتها في هذه الحالة تساوي 98 707 mm/s^2 واتجاهها هو $\theta_{E_3} = 123^o$.

خاتمة الفصل التاسع

عرض هذا الفصل خواص العجلة النسبية بين نقطتين على جسم جامد (متماسك) على أنها الفرق الاتجاهي بين عجلتي هاتين النقطتين، وبين أن هذه العجلة النسبية تتكون من مركبتين الأولى هي المركبة العمودية وتكون في اتجاه الخط الواصل بين هاتين النقطتين والثانية هي المركبة المماسة التي تكون دائما عمودية على الخط الواصل بين هاتين النقطتين ، وهذه الخاصية مفيدة جداً لتحليل العجلة في الآليات كما وضحت الأمثلة العديدة ذلك. ثم عرض الموضوع للحركة الظاهرية في حالة تحرك ضلعين على بعضهما وأكد على أهمية تحديد مسار نقطة من أحد الضلعين على الضلع الآخر حيث تتكون العجلة الظاهرية (النسبية) لهذه النقطة من ثلاث مركبات اثنتان منهما عموديتان على المسار والثالثة مماسة للمسار. وقد تم حل الأمثلة بيانيا برسم مضلع العجلة وتبين وجود صورة لكل ضلع من أضلاع الآلية في مضلع العجلة حيث تكون الصورة مشابهة هندسيا للضلع الأصلي ولكنها تميل عليه في اتجاه يعتمد على كل من السرعة الزاوية والعجلة الزاوية لهذا الضلع ، وقد وضحت الأمثلة أن استخدام صور الأضلاع في مضلع العجلة يسهل إيجاد عجلة النقاط المختلفة على هذه الأضلاع. وبينت المناقشة أنه في حال تدحرج ضلع على آخر بدون انزلاق فإن العجلة النسبية بين نقطتي تلامس الضلعين تكون دائما عمودية عليهما عند نقطتي التلامس. ولابد من الإشارة هنا إلى أنه قد جرت العادة في كثير من المراجع على حل معادلات العجلة النسبية بيانيا على أنه يمكن أيضاً حل المعادلات تحليلياً باستخدام العلاقات الهندسية بين المتجهات.

ويلزم التنويه إلى أنه يمكن استبدال الكثير من الآليات التي تنـــزلق أضلاعها على بعضها بآليات مكافئة بسيطة (كالآلية الرباعية أو آلية المنـــزلق) ، ويمكن تحليل

العجلات للآلية المكافئة برسم مضلع العجلة وهو في هذه الحالة يكون أسهل بكثير من الحل المعتمد على استخدام العجلة الظاهرية للآلية الأصلية ، وقد أشير إلى ذلك في الأمثلة 5–9 و 8–9 و 9–9 .

ملحق الفصل التاسع
إثبات معادلة عجلة كوريولس

تظهر هذه العجلة عندما يتحرك جسمين بالنسبة لبعضهما ، وكمثال على ذلك يبين شكل A9-1 حركة المنـــزلق 3 إلى الخارج نسبة إلى ذراع الدوران 2 بسرعة منتظمة مقدارها $V_{3/2}$ بينما يدور الذراع 2 بسرعة زاوية منتظمة ω_2 .

النقطة P_3 هي نقطة علي المنـــزلق 3 وهي جزء لا يتجزأ من المنـــزلق ثابتة فيه وتتحرك معه. ولابد من التفرقة بين هذه النقطة (أي P_3) وبين نقطة أخرى هي P_2 منطبقة على P_3 في بداية الحركة في اللحظة المبينة بالرسم ولكنها جزء لا يتجزأ من الذراع 2 . وبعد مرور فترة زمنية قصيرة dt ، تتحرك P_3 مع المنـــزلق بينما تتحرك P_2 مع الذراع وتنفصل النقطتان عن بعضهما ، وفي هذه الحالة يكون الذراع قد دار بزاوية مقدارها $d\theta$ وأصبح في الوضع المبين بالخط المتقطع O_2G' ، وتكون النقطة P_2 قد انتقلت إلى الموضع P'_2 ، وتكون النقطة P_3 قد انتقلت إلى الموضع P'_3 . ويمكن اعتبار حركة النقطة P_3 إلى الموضع P'_3 عبارة عن مجموع انتقالها من P'_2 إلى الموضع B + انتقالها من الموضع B إلى P'_3 . ويلاحظ أن الإزاحة $P_2 P'_2$ تتم بسرعة منتظمة لأن ω_2 منتظمة والطول $O_2 P_2$ لا يتغير ، وكذلك أن الإزاحة $P'_2 B$ تتم بسرعة منتظمة $V_{3/2}$. وعلى ذلك تكون الإزاحة $B P'_3$ قد تمت بسبب وجود عجلة في اتجاه هذه الإزاحة تسمى عجلة كوريولس . ويلاحظ أن الإزاحة $B P'_3$ تتم على قوس دائري طوله ($\text{arc } B P'_3$) حيث:

$$\text{arc } B P'_3 = (P'_2 B)\, d\theta \qquad \text{(A1)}$$

ولكن

$$(P'_2 B) = V_{3/2}\,(dt) \qquad \text{(A2)}$$

وكذلك

$$d\theta = \omega_2\,(dt) \qquad \text{(A3)}$$

وعلى هذا يكون

$$B P'_3 = V_{3/2}\ \omega_2\ (dt)^2 \qquad \text{(A4)}$$

عند بداية الحركة تكون مركبة سرعة النقطة P_3 العمودية على الخط OG

مقدارها

$$\underline{V}_{P_3} = (OP_3)\,\omega_2 \qquad (A5)$$

ولأن ω_2 ثابتة والطول (OP_3) يزداد بمعدل ثابت (هو $V_{3/2}$) فإن مركبة $\underline{V}_{P_3}$ العمودية على الخط OG تزداد بمعدل ثابت ، مما يعني بالضرورة أن عجلة النقطة P_3 العمودية على الخط OG ثابتة .. ومن المبادئ الأولية فإن إزاحة أي نقطة (ds) تتحرك بعجلة ثابتة (A) هي:

$$ds = \tfrac{1}{2} A\,(dt)^2 \qquad (A6)$$

أي أن الإزاحة $B\,P'_3$ تساوي:

$$BP'_3 = \tfrac{1}{2} A\,(dt)^2 \qquad (A7)$$

حيث A هي العجلة العمودية على الخط OG للنقطة P_3 . ومن المعادلات (A4) و(A7) :

$$V_{3/2}\,\omega_2\,(dt)^2 = \tfrac{1}{2} A\,(dt)^2$$

أي أن

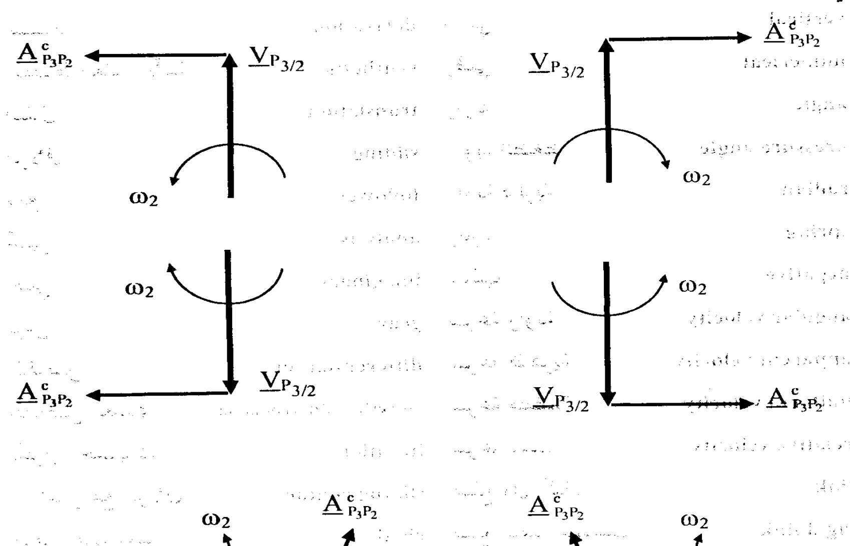
$$A = 2\,\omega_2\,V_{3/2}$$

شكل A9-1

وهذه الكمية تسمى عجلة كوريولس Coriolis acceleration على اسم المهندس العسكري الفرنسي الذي عاش في الفترة (1792–1843) وكان أول من وجه النظر إلى وجود هذه المركبة في حركة جسمين متحركين بالنسبة لبعضهما مثل انزلاق النقطة P_3 على الذراع 2 ، ويكون اتجاهها دائما عموديا على المسار الظاهري للنقطة P_3 على الذراع. وعادة يرمز لهذه العجلة بالرمز $\underline{A}^c_{P_3P_2}$ أي أن:

$$\underline{A}^c_{P_3P_2} = 2\,\underline{\omega}_2 \times \underline{V}_{P_3/2} \tag{A10}$$

ويمكن حساب مقدار هذه المركبة بعد تحليل السرعة للآلية وإيجاد $\underline{\omega}_2$ و $\underline{V}_{P_3/2}$.
ويكون اتجاهها دائما عموديا على السرعة الظاهرية $\underline{V}_{P_3/2}$ (لأن $\underline{V}_{P_3/2}$ تكون مماسة للمسار الظاهري للنقطة P_3 على الذراع). ويبين شكل A9–2 أمثلة لاتجاه $\underline{A}^c_{P_3P_2}$ في عدة حالات.



شكل A9–2

ترجمة بعض المصطلحات المهمة

Arabic	English
إحداثيات	coordinates
إزاحة	displacement
أعداد مركبة	complex numbers
أفقي	horizontal
آلة	machine
آلية	mechanism, linkage
آلية المنـــزلق المنحرف	offset crank-slider
آني (للمعادلات)	simultaneous
اتجاه	direction
استنباط	derivation
استنباط أبعاد (الآلية)	synthesis
انتقال	translation
انزلاق	sliding
تابع	follower
تحليل	analysis
تخيلي	imaginary
ترس	gear
التفاضل	differentiation
التفاضل العددي	numerical differentiation
تكرار الحسابات	iteration
التلامس مع انزلاق	sliding contact
جامد (متماسك)	rigid
الجبر	algebra
جذر	root
حد السكين	knife edge
دالة	function
الدحرجة	rolling
درجة	degree
درجة حرية	degree of freedom
دقة مضاعفة	double precision
دوران	rotation
ذراع إدارة	crank
ذراع التوصيل	connecting rod
الذراع الرابط	coupler
رأسي	vertical
رقمي	numerical
زاوية	angle
زاوية الضغط	pressure angle
زاوية دائرية	radian
زنبرك	spring
سالب	negative
سرعة زاوية	angular velocity
سرعة ظاهرية	apparent velocity
سرعة منتظمة	uniform velocity
سرعة نسبية	relative velocity
ضلع (في آلية)	link
ضلع جامد (متماسك)	rigid link
ضلع رابط	coupler
طرق عددية	numerical methods
طريقة	method

acceleration	عجلة	real	حقيقي
angular acceleration	عجلة زاوية	linear	خطي
kinematic diagram	مخطط تحليل الحركة	apparent acceleration	عجلة ظاهرية
component	مُرَكِبة	relative acceleration	عجلة نسبية
center	مركز	numerical	عددي
center of curvature	مركز انحناء	counter clockwise	عكس عقرب الساعة
derivative	المشتقة	shaft	عمود إدارة
velocity diagram	مضلع السرعة	common normal	العمود المشترك
absolute	مطلق	driven shaft	عمود تابع
clockwise	مع عقرب الساعة	driving shaft	عمود قائد
simultaneous equations	معادلات آنية	quick return	عودة سريعة
equation	معادلة	non-linear	غير خطي
non-linear equation	معادلة غير خطية	driver	قائد
transcendental	معضل (للمعادلات)	clutch	قابض
magnitude	مقدار (لكمية متجهة)	diameter	قطر
equivalent	مكافئ	cam	كامة
piston	مكبس	momentum	كمية الحركة
common tangent	المماس المشترك	instantaneous	لحظي
slider	منــــزلق	inclined	مائل
structure	منشأ (مثل مبنى ..)	shock absorber	ماص للصدمات
positive	موجب	redundant constraint	مانع زائــــد
position	موضع	vector	متجه
time ratio	نسبة الزمن	perpendicular	متعامد
relative	نسبــــي	parallel	موازي
radius	نصف قطر	unknown	مجهول (غير معروف)
radius of curvature	نصف قطر الانحناء	Cartesian axes	محاور متعامدة

origin	**نقطة الأصل**	**determinant**	**محدد**
Unit vector	**وحدة المتجه**	**motor- engine**	**محرك**
joint	**وصلة**	**resultant**	**محصلة**
hinge	**وصلة دورانية**	**axis**	**محور**

المراجع

References

Chironis, N. P. and Sclater, N., *Mechanisms and Mechanical Devices Source Book*, McGraw-Hill, 1996.

Eckhart, H. G. , *Kinematic Design of Machines and Mechanisms*, McGraw-Hill, 1998.

Erdman, A. G., Sandor, G. N. and Kota, G. N., *Mechanism Design: Analysis and Synthesis*, Prentice-Hall, 2001.

Grosjean, J. , *Kinematics and Dynamics of Machines*, McGraw-Hill, 1991.

Hannah, J. and Hillier, M. J., *Mechanical Engineering Science*, Addison Wesley Longman, 1999.

Hannah, J. and Stephens, R. C., *Mechanics of Machines*, Edward Arnold, 1984.

Haug, E. J., *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, Allyn and Bacon, Boston, 1989.

Hunt, K. H., *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Oxford Science Publications, 1990.

Jensen, P. W., *Classical and Modern Mechanisms for Engineers and Inventors*, Marcel Dekker, NY, 1991.

Josephs, J. S. and Huston, R. L., *Dynamics of Mechanical Systems*, CRC Press, 2002.

Khurmi, R. S. and Gupta, J. K., *Theory of Machines*, Eurasia Publishing House, New Delhi, 1994.

Kimbrell, J. T., *Kinematics Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill, 1991.

Mabie, H. H., and Reinholtz, C. R., *Mechanisms and Dynamics of Machinery*, Fourth Edition, Wiley, 1987.

Margitu, D. B. and Crocker, M. J., *Analytical Elements of Mechanisms*, Cambridge University Press, 2001.

Martin, G. H., *Kinematics and Dynamics of Machines*, Second Edition, McGraw-Hill, 1982.

Maunder, L. , *Machines in Motion*, Cambridge University Press, 1986.

Molian, S., *Mechanism Design*, Elseiver, 2001.

Raczkowski, G. , *Machine Dynamics,* Gulf Publishing Co., Houston, 1979.

Rao, J. S. and Dukkipati, R. V., *Mechanism and Machine Theory*, Wiley, 1989.

Shigley, J. E. and Mischke, C. R., *Mechanical Designer's Workbook*, McGraw-Hill, 1990.

Shigley, J. E. and Uicker, J. J., *Theory of Machines and Mechanisms*, McGraw-Hill, 1980.

Sneck, H. J., *Machine Dynamics*, Prentice-Hall, 1991.



Kinematic Analysis of Mechanical Linkages

Mohamed Abdel-Moneim M. Mahmoud, Ph.D.

Department of Mechanical Power Technology
College of Technology
Public Authority for Technical Education and Training
Kuwait

Foreword

Some consider inventing the wheel to be the dawn of civilization. A wheel is in essence a mechanism, albeit the simplest. After this breakthrough, progress has continued rapidly in science and technology; most of which relied on the use of machines and mechanisms. Today, man encounters dozens of mechanisms in his daily routine within the home, on the street or in the workplace. People working at factories, workshops, vehicle service centers and shipyards, among others, come across an even greater array of mechanisms. Mechanisms even touch the lives of children in their everyday toys and games as well.

This book is intended to provide the reader with knowledge of mechanism types and methods used for their position, velocity and acceleration analysis. Readers with a non-technical background may find chapter 2 particularly interesting on account of it describing a variety of mechanisms, explaining how they function by way of illustrations, drawings and pictures. Readers with a technical background will benefit also from the in-depth investigation of the treatment of different methods in Kinematic analysis of machines and mechanisms. Numerous examples are solved in detail with the solutions dissected and scrutinized through discussions for the reader's maximum understanding.

To make it easier for readers, Chapter 1 provides a comprehensive review of the fundamental knowledge needed to follow the material provided in the remainder of the book.

In addition to the simplified Arabic language used to explain the concepts and information content, the book contains an English translation to technical terms upon their initial use. An appendix of these terms and their respective translations appears in the rear of the book. This should provide a reader seeking additional information about a concept discussed in the book access to required information through English references.

Special care was given to using computers in kinematic analysis of mechanisms and in many instances the computer codes are included within the text for the benefit of the reader who desires to use them.

Chapter 5 presents a numerical method for mechanism kinematic analysis using numerical differentiation. To the best of the authors' knowledge, this method has not been presented in any other book on the subject matter.

Finally, I would like to acknowledge the assistance of my esteemed colleague Dr. Sayed Shihata Karrar for reviewing the manuscript of the book and for his many useful suggestions.

Table of Contents